



# EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Samplingsteori - några grundläggande resultat

av

**Niklas Kaunitz**

2008 - No 1



# Samplingsteori - några grundläggande resultat

Niklas Kaunitz

---

Examensarbete i matematik 15 högskolepoäng, fördjupningskurs

Handledare: Erik Svensson

2008



# 1 Inledning

## 1.1 Syfte och avgränsningar

I denna uppsats presenteras den klassiska samplingsteorin utgående från Shannon. Utöver Shannons berömda samplingsteorem undersöks resultatet av samplingsformeln när de underliggande antagandena bakom teoremet försvagas. I avsnitt 4 visas att om en funktion är översamplad kan rekonstruktionen göras mer effektiv. Här visas också att förlorade sampelvärden för en översamplad funktion kan återskapas upp till ett godtyckligt ändligt antal. Konvergenshastigheten för sampling respektive översampling undersöks också för att få ett formellt mått på effektiviteten hos översampling. Slutligen ges ett exempel på hur samplingsteori tillämpas i praktiken – sk *sample-and-hold* beskrivs som ett alternativt sätt att rekonstruera en funktion från dess sampelvärden; denna teknik används exempelvis genomgående inom digital ljudreproduktion.

De integraler som förekommer i uppsatsen ska tolkas i Lebesgue-mening. De huvudsakliga resultaten kan i princip visas även då endast Riemann-integralen används men då måste i några fall ytterligare villkor läggas på funktionerna som studeras. Detta kan vara existens av höger- och vänsterderivator i varje punkt, liksom styckvis kontinuitet och att funktionen är av begränsad variation.

Uppsatsen är disponerad på följande sätt: Inledningsvis ges en kortare presentation av grundläggande definitioner och resultat från Fourieranalys i  $L^1$  och  $L^2$ . Därefter formuleras och bevisas Shannons samplingsteorem; i anslutning till detta diskuteras även undersampling och vinkningsdistorsion (sk *aliasing*). Därpå definieras översampling och några viktiga resultat presenteras. Efter en grafisk respektive formell genomgång av konvergens för sampling och översampling diskuteras slutligen rekonstruktion med *sample-and-hold*.

Jag vill här också rikta ett stort tack till min handledare Erik Svensson vid matematiska institutionen, Stockholms universitet, för hans oändliga tålamod under denna uppsats tillkomst.

## 1.2 Definitioner

Låt  $M$  vara en godtycklig (mätbar) mängd och  $p \geq 1$ . Vi kommer att använda beteckningen  $f \in L^p(M)$  om villkoret

$$\int_M |f(x)|^p dx < \infty$$

är uppfyllt. Ett specialfall är här  $f \in L^p(\mathbb{R})$  som alltså betecknar

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Indikatorfunktionen  $\chi_I(x)$  definieras genom

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I, \\ 0 & x \notin I. \end{cases}$$

Slutligen utnyttjas att

$$\int_M \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_M f_n(x) \, dx \quad (1.1)$$

om det kan visas att antingen  $\int_M \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n(x)| \, dx < \infty$  eller  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_M |f_n(x)| \, dx < \infty$  (för en given mängd  $M$ ). Det bör poängteras att detta samband gäller generellt endast om integralerna i (1.1) tolkas som Lebesgueintegraler. Med Riemannintegralen gäller (1.1) under förutsättning att båda integralerna i uttrycket är väldefinierade i Riemann-mening (dvs funktionerna är begränsade och kontinuerliga nästan överallt).<sup>1</sup>

## 2 Fourieranalys i $L^1$ och $L^2$

Vi presenterar här några fundamentala resultat inom Fourierteori. För bevis av sats 1 se Carleson [1]. Bevis av sats 2 återfinns exempelvis i Katznelson [2] eller Rees et al. [4]; dessa innehåller också en mer rigorös genomgång av Fouriertransformen i  $L^2$ . Vretblad [5] innehåller en detaljerad framställning av Fourierserier och -integraler utan Lebesgueintegration.

**Definition 1** (1) Låt  $f \in L^1(-c, +c)$ . Dess Fourierserie på intervallet  $[-c, +c]$  är

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{s}_n e^{in\pi x/c},$$

där  $\hat{s}_n$  är Fourierkoefficienterna

$$\hat{s}_n = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(x) e^{-in\pi x/c} \, dx.$$

---

<sup>1</sup>Låt t ex  $\{q_n\}$  vara en uppräknig av de rationella talen,  $I$  ett godtyckligt intervall och sätt  $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = q_n, \\ 0 & x \neq q_n. \end{cases}$

Då gäller att

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I f_n(x) \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 = 0,$$

men

$$\int_I \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \, dx = \int_I \chi_{\mathbb{Q}} \, dx = \int_{I \cap \mathbb{Q}} \, dx$$

är endast väldefinierat för Lebesgueintegralen (som då är lika med 0).

(2) Låt  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dess Fourierintegral är

$$f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega,$$

där  $\widehat{f}(\omega)$  är Fouriertransformen

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx.$$

$f \in L^1(-c, +c)$  respektive  $f \in L^1(\mathbb{R})$  innebär att likheterna ovan är väldefinierade. Det följer också att  $\widehat{f}(\omega)$  är begränsad och likformigt kontinuerlig på  $\mathbb{R}$ . Notera att  $L^2(-c, +c) \subset L^1(-c, +c)$  så Fourierkoefficienterna är definierade även i  $L^2(\mathbb{R})$ . För Fourierserier har vi nu följande resultat.

**Sats 1 (Carleson)** Antag att  $f \in L^2(-c, +c)$  är  $2c$ -periodisk. Då gäller

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\pi x/c} \quad \text{n.ö.}$$

I denna uppsats kommer endast Fourierserier i  $L^2(-c, +c)$  att användas.<sup>2</sup> Detta resultat kan emellertid utvidgas till att gälla även för funktioner i  $L^1(-c, +c)$ , förutsatt att någon ytterligare begränsning läggs på  $f$ , som exempelvis att  $f$  är av begränsad variation på  $\mathbb{R}$ .<sup>3</sup> I Kolmogorov [3] visas att det finns en funktion i  $L^1(-\pi, +\pi)$  sådan att dess Fourierserie divergerar överallt, så det är tydligt att något ytterligare antagande är nödvändigt för konvergens i  $L^1(-c, +c)$ .

För att definiera Fouriertransformen i  $L^2(\mathbb{R})$  krävs lite förarbete, emedan det inte är givet att transformen som den uttrycks i definition 1 konvergerar för  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ . Det kan här noteras att varken  $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  eller  $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$  gäller.<sup>4</sup> Antag alltså att  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Eftersom  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  är tät i  $L^2(\mathbb{R})$  (eller starkare, för varje  $p$  är mängden av funktioner i  $L^p$  med kompakt stöd tät i  $L^2(\mathbb{R})$ ) finns en funktionsserie  $f_n$  i  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  som konvergerar till  $f$ . Definiera exempelvis  $f_n$  genom

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq n, \\ 0 & |x| > n. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Notera att  $f \in L^2(-c, +c)$  är ett starkare villkor än  $f \in L^1(-c, +c)$  då det alltid gäller, om  $q > p$ , att  $L^q(-c, +c) \subset L^p(-c, +c)$ .

<sup>3</sup> $f$  sägs vara av begränsad variation på ett intervall  $[a, b]$  om det finns ett  $K$  sådant att det för varje partition  $a = x_1 < \dots < x_n = b$  gäller  $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq K$ .

<sup>4</sup>Betrakta exempelvis funktionerna  $f(x) = \begin{cases} 1/x & |x| \geq 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$  och  $g(x) = \begin{cases} x^{-1/2} \sin x & |x| \geq 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$ . Det gäller nu att  $f$  är i  $L^2(\mathbb{R})$  men inte i  $L^1(\mathbb{R})$ , liksom vi har att  $g$  är i  $L^1(\mathbb{R})$  men inte i  $L^2(\mathbb{R})$ . Följaktligen gäller varken  $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  eller  $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ .

Då följer  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  genom Cauchy-Schwarz olikhet:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \chi_{[-n,+n]}(x) dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-n,+n]}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2n} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Vidare är det uppenbart att  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$  och därmed även  $\widehat{f}_n(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$  genom en version av Parsevals formel (sats 3) för funktioner i  $L^1 \cap L^2$ . Betrakta nu serien  $\widehat{f}_n(\omega)$  då  $n \rightarrow \infty$  under  $L^2(\mathbb{R})$ -normen och antag  $n > m$ :

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|^2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|^2 = \|f_n - f_m\|^2 = \int_{-n}^{-m} |f(x)|^2 dx + \int_m^n |f(x)|^2 dx.$$

Integralerna i högerledet går mot 0 då  $m, n \rightarrow \infty$  eftersom  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .  $\widehat{f}_n(\omega)$  är alltså en Cauchy-sekvens i  $L^2(\mathbb{R})$ , och därmed (eftersom  $L^2(\mathbb{R})$ -rummet är fullständigt) konvergerar  $\widehat{f}_n(\omega)$  till en funktion  $\widehat{f}(\omega)$  i  $L^2(\mathbb{R})$ .

Låt nu  $g_n$  vara en godtycklig funktionsserie i  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  sådan att  $g_n \rightarrow f$  i  $L^2$ -normen. Då följer återigen av Parsevals identitet att

$$\|\widehat{g}_n - \widehat{f}\| = \|g_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

och vi kan alltså göra följande definition:

**Definition 2** Låt  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Då definieras dess Fouriertransform  $\widehat{f}$  entydigt genom

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(\omega),$$

där  $f_n$  är någon funktionsserie sådan att  $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  samt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  i  $L^2$ -normen.

För  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  är både definition 1 och 2 tillämplig, dock är det tydligt att de i detta fall är ekvivalenta. Låt nämligen  $\widehat{f}^*$  vara Fouriertransformen som den definieras i definition 2. Då gäller  $\|\widehat{f}^* - \widehat{f}\| \rightarrow 0$  i  $L^2(\mathbb{R})$  och därmed finns en sekvens  $N_k$  sådan att

$$\widehat{f}^*(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-N_k}^{N_k} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx \quad \text{n.ö.}$$

Det sista uttrycket konvergerar emellertid till integralen över hela  $\mathbb{R}$  om  $f \in L^1(\mathbb{R})$  vilket är lika med definition 1. Sammantaget kan alltså Fouriertransformen definieras för alla  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$  genom

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx.$$



**Sats 2** Låt  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Då gäller

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\omega|}{\lambda}\right) \widehat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega \quad \text{n.ö.} \quad (2.1)$$

med likhet överallt om  $f$  är kontinuerlig. Om  $\widehat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$  konvergerar (2.1) till

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega \quad \text{n.ö.}$$

med likhet överallt om  $f$  är kontinuerlig.

Vi kommer att föredra den senare formuleringen då det är möjligt – detta gäller exempelvis när  $\widehat{f}$  har kompakt stöd (vilket tillsammans med  $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , se Parsevals formel nedan, implicerar  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ).

## 2.1 Andra viktiga resultat

Följande sats kommer också visa sig vara användbara.

**Sats 3 (Parsevals formel)** (1) Låt  $f, g \in L^2(-c, +c)$ . Då gäller

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n \overline{\widehat{g}_n}$$

och

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^c |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

(2) Låt  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Då gäller

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega$$

och

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Speciellt gäller

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^c |f(x)|^2 dx < \infty \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2 < \infty \quad \text{samt} \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Sats 4 (Faltningsteoremet)** Låt  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  och definiera faltningen  $f * g$  av  $f$  och  $g$  genom

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy.$$

Då är  $f * g$  konvergent,  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ , och följande samband gäller:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

### 3 Samplingsteoremet och undersampling

#### 3.1 Shannons samplingsteorem

I följande sats kommer vi att använda oss av funktionen

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Notera att  $\text{sinc } x$  är kontinuerlig (genom standardgränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ).

**Sats 5 (Shannon-Nyquist)** Låt  $s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$  vara kontinuerlig och antag att  $\widehat{s}(\omega) = 0$  utanför  $[-B, +B]$ . Då gäller att

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \text{sinc}(2Bt - n) \quad (3.1)$$

och serien konvergerar likformigt på hela  $\mathbb{R}$ . Uttrycket  $2B$  benämns samplingsfrekvens.

*Bevis:* Om  $s \in L^2(\mathbb{R})$  ger Parsevals formel att  $\widehat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ . Eftersom  $\widehat{s}$  dessutom har kompakt stöd på  $\mathbb{R}$  följer att  $\widehat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ . Om istället  $s \in L^1(\mathbb{R})$  gäller

$$|\widehat{s}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} s(t)e^{-2i\pi\omega t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)e^{-2i\pi\omega t}| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty$$

så  $\widehat{s}(\omega)$  är begränsad på  $\mathbb{R}$ . Det implicerar att  $\widehat{s} \in L^1(-B, +B) \cap L^2(-B, +B)$  och därmed även  $\widehat{s} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  eftersom  $\widehat{s}(\omega) = 0$  för  $|\omega| > B$  (genom Parsevals formel följer nu även  $s \in L^2(\mathbb{R})$ ). Enligt sats 2 kan  $s(t)$  därmed skrivas som Fourierintegralen

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega = \int_{-B}^B \widehat{s}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega.$$

Ansatsen är nu att tillämpa Parsevals formel (sats 3) på detta uttryck. För detta syfte definierar vi följande funktioner:

$$u(\omega) = 2B \widehat{s}(\omega), \quad v(\omega) = e^{-2i\pi\omega t},$$

båda begränsade till  $|\omega| \leq B$ . Dessa kan representeras med Fourierserier över  $[-B, +B]$  (som vore de  $2B$ -periodiska). Fourierkoefficienterna är

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B 2B \widehat{s}(\omega) e^{-in\pi\omega/B} d\omega = \int_{-B}^B \widehat{s}(\omega) e^{2i\pi\omega(-n/2B)} d\omega = s\left(-\frac{n}{2B}\right), \quad (3.2)$$

respektive

$$\hat{v}_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{-2i\pi\omega t} e^{-in\pi\omega/B} d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{-i\pi\omega(2t + \frac{n}{B})} d\omega = \text{sinc}(2Bt + n). \quad (3.3)$$

Parsevals formel ger nu (både  $u(\omega)$  och  $v(\omega)$  är  $L^2(-B, +B)$ )

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-B}^B \widehat{s}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B 2B \widehat{s}(\omega) e^{-2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B u(\omega) \overline{v(\omega)} d\omega \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n \overline{\hat{v}_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{n}{2B}\right) \overline{\text{sinc}(2Bt + n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \text{sinc}(2Bt - n). \end{aligned}$$

För att visa att konvergensen är likformig betraktar vi resttemen:

$$\begin{aligned} e(t) &= \left| s(t) - \sum_{n=-N_1}^{N_2} \hat{u}_n \overline{\hat{v}_n} \right| = \left| \sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} \hat{u}_n \overline{\hat{v}_n} \right| \leq \sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{u}_n| |\hat{v}_n| \\ &\leq \left( \sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{u}_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{v}_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Inför uppskattningen av det första uttrycket betraktar vi serien  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2$ . Parsevals formel ger att

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2 = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B |u(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B |2B \widehat{s}(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

(vi har sedan tidigare att  $\widehat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ ). Men  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2 < \infty$  implicerar

$$\sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{u}_n|^2 = \sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} \left| s\left(-\frac{n}{2B}\right) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{då } N_1, N_2 \rightarrow \infty.$$

Detta uttryck är oberoende av  $t$ , så likformig konvergens följer om vi kan visa att  $\sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{v}_n|^2$  är begränsad. Detta ges emellertid av

$$\sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{v}_n|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_n|^2 = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B |v(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B |e^{-2i\pi\omega t}|^2 d\omega = 1.$$

Då högerledet i (3.1) är en summa av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt kommer den resulterande summan alltid att vara en kontinuerlig funktion. Om  $s$  är kontinuerlig gäller därmed likhet överallt.

■

Lägg märke till att då  $t = \frac{n_0}{2B}$  för något  $n_0 \in \mathbb{Z}$  reduceras samplingsformeln (3.1) till  $s(t) = s(\frac{n_0}{2B})$ , emedan

$$\operatorname{sinc}\left(2B \frac{n_0}{2B} - n\right) = \frac{\sin \pi(n_0 - n)}{\pi(n_0 - n)} = 0$$

för alla  $n \neq n_0$ .

### 3.2 Undersampling

Teorem 5 väcker frågan om vad som händer om vi släpper antagandet att Fouriertransformen  $\widehat{s}(\omega)$  är 0 utanför  $[-B, +B]$  men ändå samplar funktionen i intervall om  $1/2B$  enligt (3.1). Vi kommer i det följande att istället göra antagandet

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| < \infty.$$

Detta antagande garanterar att summan i samplingsformeln (3.1) är väldefinierad, eftersom

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bt - n) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| < \infty.$$

Låt nu  $\tilde{s}(t)$  vara summan definierad i samplingsformeln (3.1). Då ser vi från ekvation (3.3) att

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bt - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{n}{2B}\right) \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{-i\pi\omega(2t + \frac{n}{B})} d\omega = \begin{bmatrix} n = -n \\ \omega = -\omega \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{i\pi\omega(2t - \frac{n}{B})} d\omega = \int_{-B}^B \left( \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B} \right) e^{2i\pi\omega t} d\omega \quad (3.4) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B} \right) \chi_{[-B, +B]}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

där vi använt oss av beräkningen av  $\hat{v}_n$  i beviset till sats 5. Omkastningen av summations- och integrationsordning är tillåten då

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{1}{2B} e^{i\pi\omega(2t - \frac{n}{B})} \right| \leq \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| \left| e^{i\pi\omega(2t - \frac{n}{B})} \right| = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| < \infty,$$

så dess integral över  $[-B, +B]$  är ändlig. Den sista uttrycket i (3.4) är en Fourierintegral och vi har alltså att

$$\widehat{\tilde{s}}(\omega) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B} \cdot \chi_{[-B, +B]}(\omega).$$

Förekomsten av indikatorfunktionen  $\chi_{[-B,+B]}(\omega)$  i uttrycket innebär att  $\tilde{s}(t)$  endast består av frekvenser mellan  $-B$  och  $+B$ , oavsett hur den ursprungliga funktionen  $s(t)$  ser ut. För att kunna säga mer om hur  $\tilde{s}(t)$  förhåller sig till  $s(t)$  behöver vi följande lemma:

**Lemma 1 (Poissonformeln)** Låt  $s(t) \in L^1(\mathbb{R})$  vara kontinuerlig. För varje  $B$  gäller då att  $\Phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(t + n2B)$  är en  $2B$ -periodisk funktion och  $\Phi(t) \in L^1(-B, +B)$ . Denna funktion har Fourierkoefficienterna

$$\hat{\Phi}_n = \frac{1}{2B} \cdot \hat{s}\left(\frac{n}{2B}\right).$$

*Bevis:* Att  $\Phi(t)$  är  $2B$ -periodisk följer direkt ur definitionen. Vidare

$$\begin{aligned} \int_{-B}^B |\Phi(t)| dt &= \int_{-B}^B \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t + k2B) \right| dt \leq \int_{-B}^B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(t + k2B)| dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-B}^B |s(t + k2B)| dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(2k-1)B}^{(2k+1)B} |s(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

så  $\Phi(t) \in L^1(-B, +B)$ . (Vi har samtidigt visat att  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-B}^B |s(t + k2B)| dt < \infty$  så omkastning av summations- och integrationsordning är tillåten.) Betrakta slutligen Fourierkoefficienterna:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_n &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \Phi(t) e^{-in\pi t/B} dt = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t + k2B) \right] e^{-in\pi t/B} dt \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-B}^B s(t + k2B) e^{-in\pi(t+k2B)/B} dt = \frac{1}{2B} \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi(n/2B)t} dt = \frac{1}{2B} \hat{s}\left(\frac{n}{2B}\right). \end{aligned}$$

Vi har visat ovan att omkastningen av integrations- och summationsordning är tillåten. Notera också att vi vid förändringen av integrationsintervallet har vi utnyttjat att  $e^{-in\pi t/B}$  är  $2B$ -periodisk med avseende på  $t$ .

■

Följande sats anger hur en funktion förvanskas då den samplas med för korta intervall.

**Sats 6** Låt  $s, \hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$  och antag att  $s$  är kontinuerlig samt  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s(\frac{n}{2B})| < \infty$ . Låt  $\tilde{s}(t)$  vara funktionen  $s(t)$  samplad i enlighet med (3.1). Då gäller

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{s}}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega,$$

där

$$\hat{\tilde{s}}(\omega) = \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\omega + k2B) \right] \cdot \chi_{[-B,+B]}(\omega).$$

*Bevis:* I början av avsnittet visades

$$\tilde{s}(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bt - n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B} \chi_{[-B, +B]}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega,$$

där inget antagande gjorts om  $\hat{s}(\omega)$ . Detta är en Fourierintegral, och vi vill alltså visa

$$\frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B} \cdot \chi_{[-B, +B]}(\omega) = \hat{\tilde{s}}(\omega) = \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\omega + k2B) \right] \cdot \chi_{[-B, +B]}(\omega),$$

där likheten måste gälla nästan överallt. Enligt Poissonformeln (lemma 1) gäller nu (emedan  $\hat{s}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ )

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\omega + k2B) &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{2B} \hat{s}\left(\frac{n}{2B}\right) \right] e^{in\pi\omega/B} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2B} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\nu) e^{-2i\pi(n/2B)\nu} d\nu \right) e^{in\pi\omega/B} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2B} s\left(-\frac{n}{2B}\right) e^{in\pi\omega/B} = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-in\pi\omega/B}. \end{aligned}$$

Vi vet att  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s(\frac{n}{2B})| < \infty$ . Det innebär att det finns ett  $N$  sådant att  $|s(\frac{n}{2B})| < 1$  för  $|n| > N$ . Därmed  $s(\frac{n}{2B})^2 < |s(\frac{n}{2B})|$  för  $|n| > N$  och det följer att  $s(\frac{n}{2B})^2 < \infty$ . Parsevals formel ger nu  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\omega + k2B) \in L^2(-B, +B)$  så från sats 1 följer att vi har likhet nästan överallt ovan (för  $\omega \in [-B, +B]$ ). Därmed är de respektive uttryckens restriktioner till  $[-B, +B]$  utbytbara i Fourierintegralen för  $\tilde{s}$  och beviset är avslutat.

■

I det fall  $\hat{s}(\omega)$  är 0 utanför  $[-B, +B]$  gäller uppenbarligen  $\hat{\tilde{s}}(\omega) = \hat{s}(\omega)$ , så sats 5 följer som ett specialfall.

**Anmärkning.** Teorem 6 implicerar att det villkor som föregår samplingsteoremet är nödvändigt – dvs en  $B$ -bandbegränsad funktion måste samplas med en samplingsfrekvens på åtminstone  $2B$  för att (3.1) ska konvergera till den ursprungliga funktionen. Av detta skäl kallas halva samplingsfrekvensen för *Nyquistfrekvensen* – detta är alltså den högsta frekvens som kan representeras i serien (3.1).

Då  $s(t)$  är en reell funktion ger en för låg samplingsfrekvens en särskild karaktäristisk förändring av  $\hat{s}(\omega)$  som går under namnet *vikningsdistorsion*. Detta har sitt ursprung i det faktum att Fouriertransformen av en reell funktion är *hermitiskt jämn*, dvs

$$\hat{s}(-\omega) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi(-\omega)t} dt = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{2i\pi\omega t} dt = \overline{\hat{s}(\omega)}.$$

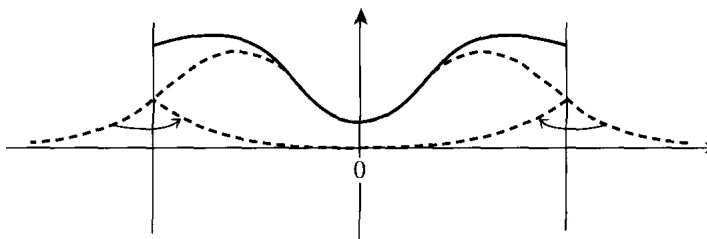
Därmed är  $\operatorname{Re}[\hat{s}(\omega)]$  jämn och  $\operatorname{Im}[\hat{s}(\omega)]$  udda, och följaktligen är  $|\hat{s}(\omega)|$  en jämn funktion.

Låt oss som ett exempel betrakta fallet där  $\hat{s}(\omega) \neq 0$  för  $|\omega| \leq 2B$  men  $\hat{s}(\omega) = 0$  för alla andra  $\omega$ . Då ger sats 6 för alla  $\omega \leq B$

$$\hat{\tilde{s}}(B - \omega) = \hat{s}(B - \omega) + \hat{s}(-B - \omega) = \hat{s}(B - \omega) + \overline{\hat{s}(B + \omega)}.$$

Frekvenser över  $\omega > B$  speglas alltså i  $B$ . Figur 1 illustrerar en förenklad situation då vi antar att  $|\widehat{s}(\omega)|$  utan vidare kan adderas.<sup>5</sup>

**Figur 1:** Illustration av vinkningsdistorsion: de streckade kurvorna visar hur Fouriertransformen för den ursprungliga funktionen speglas i Nyquistfrekvensen för  $|\widehat{s}(\omega)| > B$ , adderas med  $|\widehat{s}(\omega)| < B$ , och resulterar i den heldragna kurvan. (I figuren antas också, för enkelhetens skull, att  $\widehat{s}(\omega) = 0$  för  $|\omega| > 2B$ .)



## 4 Översampling

### 4.1 Översamplingsteoremet

Från sats 5 och 6 var för sig följer trivialt att (3.1) konvergerar även då samplingsfrekvensen väljs större. Följande sats visar att man med översampling kan få en serie som konvergerar snabbare än (3.1).

**Sats 7** Låt  $s \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$  vara kontinuerlig och antag att  $\widehat{s}(\omega) = 0$  för  $|\omega| > B$ . Låt vidare  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  vara en reellvärd funktion (filter) med  $\widehat{\phi}(\omega) = 1$  på  $[-B, +B]$  och  $\widehat{\phi}(\omega) = 0$  då  $|\omega| > aB$ , där  $a \geq 1$  är en konstant. Då gäller

$$s(t) = \frac{1}{2aB} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(t - \frac{n}{2aB}\right) \quad (4.1)$$

och konvergensen är likformig på  $\mathbb{R}$ .

**Anmärkning.** Med  $\widehat{\phi}(\omega) = \chi_{[-B, +B]}(\omega)$  och  $a = 1$  fås sats 5 som specialfall.

*Bevis:* Vi har samma angreppssätt som i beviset till samplingsteoremet. Analogt med det beviset följer från  $s \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$  samt  $\widehat{s}(\omega) = 0$  för  $|\omega| > B$  att  $\widehat{s} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Vi definierar  $u(\omega)$  och  $v(\omega)$  som

$$u(\omega) = 2aB \widehat{s}(\omega), \quad v(\omega) = \overline{\widehat{\phi}(\omega)} e^{-2i\pi\omega t} = \widehat{\phi}(-\omega) e^{-2i\pi\omega t},$$

<sup>5</sup>Figuren är lånad från <http://www.uni-muenster.de/Physik/CT/>

där den sista likheten följer av att  $\widehat{\phi}(\omega)$  är hermitiskt jämn. Båda dessa funktioner är i  $L^2(\mathbb{R})$  och deras Fourierkoefficienter, på intervallet  $|\omega| \leq aB$ , är

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} 2aB \widehat{s}(\omega) e^{-in\pi\omega/aB} d\omega = \int_{-aB}^{aB} \widehat{s}(\omega) e^{2i\pi\omega(-n/2aB)} d\omega = s\left(-\frac{n}{2aB}\right),$$

respektive

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} \widehat{\phi}(-\omega) e^{-2i\pi\omega t} e^{-in\pi\omega/aB} d\omega = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} \widehat{\phi}(\omega) e^{2i\pi\omega t} e^{in\pi\omega/aB} d\omega \\ &= \frac{1}{2aB} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\omega) e^{2i\pi\omega(t + \frac{n}{2aB})} d\omega = \frac{1}{2aB} \phi\left(t + \frac{n}{2aB}\right). \end{aligned}$$

Parsevals formel ger nu

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} 2aB \widehat{s}(\omega) \widehat{\phi}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} u(\omega) \overline{v(\omega)} d\omega \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n \overline{\hat{v}_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{n}{2aB}\right) \overline{\frac{1}{2aB} \phi\left(t + \frac{n}{2aB}\right)} = \frac{1}{2aB} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(t - \frac{n}{2aB}\right). \end{aligned}$$

Likformig konvergens kan nu bevisas såsom i beviset för sats 5. Eftersom  $u(\omega)$  här är definierat på ett motsvarande sätt räcker det med att visa  $\sum |\hat{v}_n|^2 < \infty$  för  $n \in \mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]$ , vilket följer av  $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\sum_{\mathbb{Z} \setminus [-N_1, N_2]} |\hat{v}_n|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_n|^2 = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{\phi}(-\omega) e^{-2i\pi\omega t}|^2 d\omega \leq \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

■

Som exempel på ett filter kan följande funktion betraktas:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq B, \\ \frac{aB-\omega}{aB-B} & B \leq \omega \leq aB, \\ 0 & \omega \geq aB, \end{cases} \quad \text{samnt} \quad \widehat{\varphi}(-\omega) = \widehat{\varphi}(\omega). \quad (4.2)$$

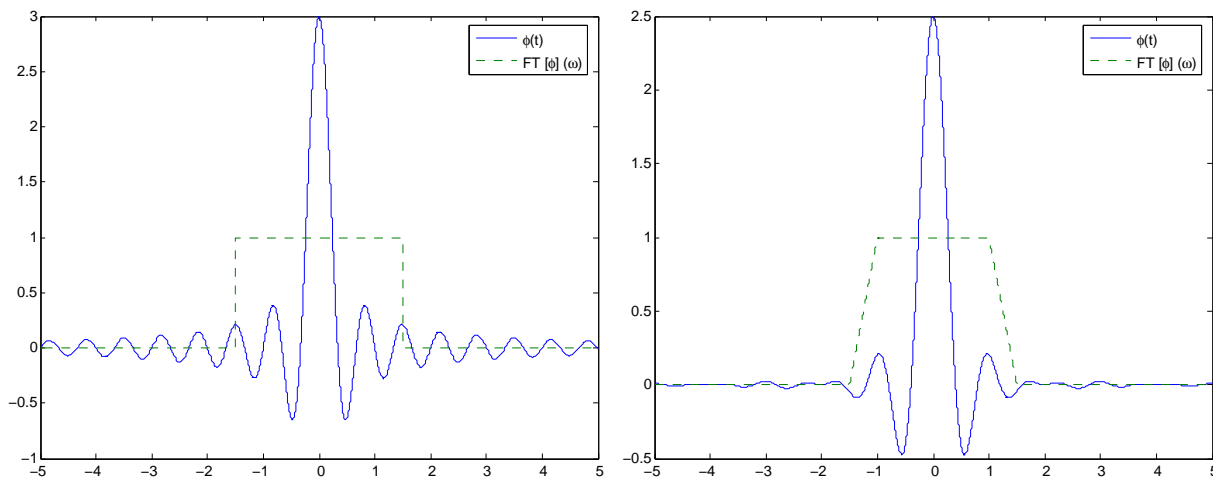
Denna transform motsvaras av följande funktion:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = 2 \int_0^{aB} \widehat{\varphi}(\omega) \cos 2\pi\omega t d\omega \\ &= 2 \int_0^B \cos 2\pi\omega t d\omega + 2 \int_B^{aB} \frac{aB-\omega}{aB-B} \cos 2\pi\omega t d\omega = \frac{\cos 2\pi Bt - \cos 2\pi aBt}{2\pi^2 t^2 (aB-B)} \quad (t \neq 0). \end{aligned}$$

med  $\varphi(0) = aB + B$ . Se figur 2.



**Figur 2:** En jämförelse av filterfunktionen  $\phi$  vid vanlig sampling (vänster) och vid översampling med  $\varphi$ , ekvation (4.2) (höger). Den streckade kurvan i respektive figur visar Fouriertransformen  $\widehat{\phi}(\omega)$ . (I figurerna har  $B = 1$  och  $a = 1,5$  använts.)



Grafen för filterfunktionen  $\phi(t)$  anger hur översamplingsformeln (4.1) viktar sampelvärdena kring punkten  $t$  då  $s(t)$  rekonstrueras. Figur 2 visar att denna viktning är mer koncentrerad för översampling med filtret  $\varphi(t)$  än för vanlig sampling vid  $2B$ . Detta framgår också då filterfunktionen betraktas, såsom den uppträder i översamplingsformeln (4.1):

$$\varphi\left(t - \frac{n}{2aB}\right) = \frac{\cos 2\pi B\left(t - \frac{n}{2aB}\right) - \cos 2\pi aB\left(t - \frac{n}{2aB}\right)}{2\pi^2\left(t - \frac{n}{2aB}\right)^2(aB - B)}.$$

$n$  ingår här kvadratisk i nämnaren, till skillnad från i samplingsformeln (3.1). Med hjälp av översampling kan man alltså, med ett lämpligt filter, synbarligen åstadkomma snabbare konvergens. Detta behandlas mer formellt i avsnittet om konvergens.

## 4.2 Redundans och rekonstruktion vid översampling

Från sats 7 följer omedelbart att ett enstaka bortfall kan rekonstrueras om funktionen översamplas. Låt nämligen  $n_0$  vara det  $n$  för vilket  $s(\frac{n_0}{2aB})$  har fallit bort. Ekvation (4.1) ger nu

$$\begin{aligned} s\left(\frac{n_0}{2aB}\right) &= \frac{1}{2aB} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{n_0 - n}{2aB}\right) = \frac{1}{2aB} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ n \neq n_0}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{n_0 - n}{2aB}\right) + s\left(\frac{n_0}{2aB}\right) \frac{\phi(0)}{2aB} \\ \Rightarrow s\left(\frac{n_0}{2aB}\right) &= \frac{\frac{1}{2aB} \sum_{n \neq n_0} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{n_0 - n}{2aB}\right)}{1 - \phi(0)/2aB} = \frac{\sum_{n \neq n_0} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{n_0 - n}{2aB}\right)}{2aB - \phi(0)}. \end{aligned}$$

Notera att uttrycket ovan ej är giltigt om  $\phi(0) = 2aB$ , dvs om  $\widehat{\phi}(\omega) = 1$  på hela  $[-aB, +aB]$ . Detta kommer att inkludera fallet när  $s(t)$  inte översamplas (då  $a = 1$ ) – översampling är alltså

nödvändigt för att förlorade sampelvärden ska kunna rekonstrueras. Följande sats visar att detta resonemang kan generaliseras till godtyckligt många bortfall.

**Sats 8** Om en funktion översampelas i enlighet med sats 7 kan förlorade sampelvärden rekonstrueras upp till varje ändligt antal.

*Bevis:*<sup>6</sup> Antag att sampelvärden har fallit bort vid  $k$  punkter och benämna dessa punkter  $t_1, \dots, t_k$  (vi antar för enkelhetens skull att de är ordnade i växande följd). Då finns heltal  $\eta_1 < \dots < \eta_k$  sådana att  $t_i = \frac{\eta_i}{2aB}$ . Låt nu  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ . Från ekvation (4.1) följer, för varje  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned} s(t_i) &= s\left(\frac{\eta_i}{2aB}\right) = \frac{1}{2aB} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i}{2aB} - \frac{n}{2aB}\right) \\ &= \frac{1}{2aB} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ n \notin \boldsymbol{\eta}}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - n}{2aB}\right) + \frac{1}{2aB} \sum_{n \in \boldsymbol{\eta}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - n}{2aB}\right) \\ \Leftrightarrow & s\left(\frac{\eta_1}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - \eta_1}{2aB}\right) + \dots + s\left(\frac{\eta_i}{2aB}\right) (\phi(0) - 2aB) + \dots + s\left(\frac{\eta_k}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - \eta_k}{2aB}\right) \\ &= - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ n \notin \boldsymbol{\eta}}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - n}{2aB}\right), \end{aligned}$$

där högerledet är en konstant. Sammantaget genererar detta ett system med  $k$  ekvationer och  $k$  okända vilket kan skrivas i matrisform enligt följande:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2aB - \phi(0) & \dots & -\phi\left(\frac{\eta_1 - \eta_i}{2aB}\right) & \dots & -\phi\left(\frac{\eta_1 - \eta_k}{2aB}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi\left(\frac{\eta_i - \eta_1}{2aB}\right) & \dots & 2aB - \phi(0) & \dots & -\phi\left(\frac{\eta_i - \eta_k}{2aB}\right) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi\left(\frac{\eta_k - \eta_1}{2aB}\right) & \dots & -\phi\left(\frac{\eta_k - \eta_i}{2aB}\right) & \dots & 2aB - \phi(0) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s\left(\frac{\eta_1}{2aB}\right) \\ \vdots \\ s\left(\frac{\eta_i}{2aB}\right) \\ \vdots \\ s\left(\frac{\eta_k}{2aB}\right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{n \notin \boldsymbol{\eta}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_1 - n}{2aB}\right) \\ \vdots \\ \sum_{n \notin \boldsymbol{\eta}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_i - n}{2aB}\right) \\ \vdots \\ \sum_{n \notin \boldsymbol{\eta}} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(\frac{\eta_k - n}{2aB}\right) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}},$$

där  $\boldsymbol{\Phi}$  är en  $k \times k$ -matris och  $\mathbf{S}$  och  $\boldsymbol{\Sigma}$  är  $k \times 1$ -matriser. Om  $\boldsymbol{\Phi}$  är inverterbar fås lösningen därmed genom

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}.$$

Det återstår således att visa att  $\boldsymbol{\Phi}$  är inverterbar. Vi nöjer oss med fallet då översampling utförs med Shannon-formeln, dvs  $\phi(t) = 2B \operatorname{sinc} 2Bt$  (se anmärkning till sats 7).<sup>7</sup> Med variabelbytet

<sup>6</sup>Delbeviset att  $\boldsymbol{\Phi}$  är positivt definit kommer helt och fullt från min handledare Erik Svensson.

<sup>7</sup>Detta är uppenbarligen ingen restriktion – det finns inget som hindrar att övriga värden på  $s(t)$  rekonstrueras med ett mer sofistikerat filter, som exempelvis  $\varphi$ , ekvation (4.2).

$\alpha = 1/a$  ( $0 < \alpha < 1$ ) fås

$$\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} 2B/\alpha - 2B & \cdots & -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_1 - \eta_i) & \cdots & -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_1 - \eta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_i - \eta_1) & \cdots & 2B/\alpha - 2B & \cdots & -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_i - \eta_k) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_k - \eta_1) & \cdots & -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_k - \eta_i) & \cdots & 2B/\alpha - 2B \end{pmatrix}.$$

För att visa att denna matris är inverterbar ska vi utnyttja det faktum att en positivt definit matris har positiv determinant och därmed också är inverterbar. Vi vill alltså visa att den kvadratiska formen till  $\Phi(\alpha)$ , definierad genom

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \Phi(\alpha) \cdot \mathbf{x} = (x_1 \ \cdots \ x_k) \cdot \Phi(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

är strikt positiv för alla  $\alpha \in (0, 1)$  och  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^k$  ( $k \geq 1$ ), för alla  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Då vi utvecklar  $Q(\mathbf{x})$  får vi

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= (x_1 \ \cdots \ x_k) \cdot \begin{pmatrix} 2B/\alpha - 2B & \cdots & -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_1 - \eta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2B \operatorname{sinc} \alpha(\eta_k - \eta_1) & \cdots & 2B/\alpha - 2B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \\ &= (2B/\alpha - 2B) \sum_{i=1}^k x_i^2 - 2B \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^k \operatorname{sinc} \alpha(\eta_i - \eta_j) x_i x_j \\ &= 2B(1/\alpha - 1) \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{2B}{\pi\alpha} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^k \frac{\sin \pi\alpha(\eta_i - \eta_j)}{\eta_i - \eta_j} x_i x_j. \end{aligned}$$

Betrakta nu följande funktion:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{2B} Q(\mathbf{x}) = (1 - \alpha) \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^k \frac{\sin \pi\alpha(\eta_i - \eta_j)}{\eta_i - \eta_j} x_i x_j.$$

Det är uppenbart att om vi kan visa att  $\Gamma(\alpha) > 0$  så följer även  $Q(\mathbf{x}) > 0$  (på intervallet  $0 < \alpha < 1$ ). Eftersom  $\Gamma(1) = 0$  följer slutsatsen om vi kan visa att  $\Gamma(\alpha)$  är avtagande på  $[0, 1]$  och strängt avtagande i en vänsteromgivning till 1. Vi ska visa att  $\Gamma(\alpha)$  i själva verket är strängt avtagande på hela  $[0, 1]$ . Derivering ger

$$\Gamma'(\alpha) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^k \cos \pi\alpha(\eta_i - \eta_j) x_i x_j = - \sum_{i,j=1}^k \cos \pi\alpha(\eta_i - \eta_j) x_i x_j.$$

Den sista summan kan skrivas om med hjälp av den trigonometriska identiteten

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

och derivatan kan därmed uttryckas som

$$\begin{aligned} \Gamma'(\alpha) &= - \sum_{i,j=1}^k \cos(\pi\alpha\eta_i) \cos(\pi\alpha\eta_j) x_i x_j - \sum_{i,j=1}^k \sin(\pi\alpha\eta_i) \sin(\pi\alpha\eta_j) x_i x_j \\ &= - \left( \sum_{i=1}^k \cos(\pi\alpha\eta_i) x_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^k \sin(\pi\alpha\eta_i) x_i \right)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\Gamma'(\alpha)$  är alltså avtagande på hela  $\mathbb{R}$ . Betrakta nu nollställena till  $\Gamma'(\alpha)$ . Från uttrycket ovan följer att  $\Gamma'(\alpha) = 0$  om och endast om båda summorna är 0. Detta innebär att nollställena till  $\Gamma'(\alpha)$  är en delmängd av nollställena till funktionen

$$G(\alpha) = \sum_{j=1}^k \cos(\pi\alpha\eta_j) x_j + i \sum_{j=1}^k \sin(\pi\alpha\eta_j) x_j = \sum_{j=1}^k e^{i\pi\alpha\eta_j} x_j.$$

Slutligen gör vi variabelbytet  $z = e^{i\pi\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  (dvs  $|z| = 1$ ,  $\text{Im}[z] > 0$ ), vilket ger

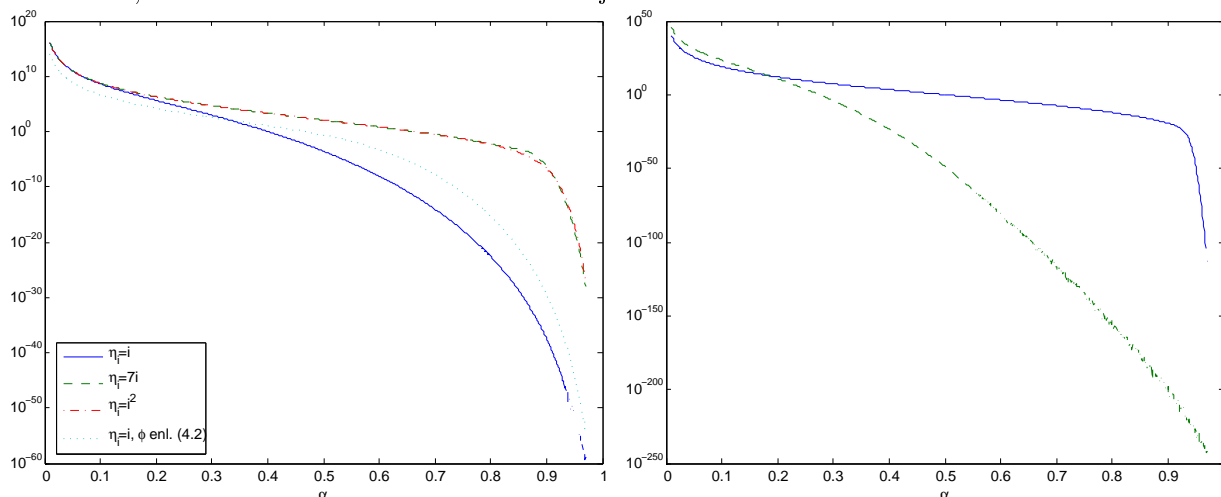
$$G(z) = \sum_{j=1}^k x_j z^{\eta_j}.$$

$G(z)$  är alltså ett komplext polynom av graden  $\eta_k$  och har därmed enligt algebrans fundamentalsats högst  $\eta_k$  nollställen. Speciellt gäller att  $\Gamma'(\alpha) = 0$  för högst ändligt många  $\alpha \in (0, 1)$ . Vidare är  $\Gamma(\alpha)$  kontinuerlig då det är en summa av kontinuerliga funktioner. Tillsammans med  $\Gamma'(\alpha) \leq 0$  för alla  $\alpha \in (0, 1)$  följer nu att  $\Gamma(\alpha)$  är strängt avtagande på hela  $[0, 1]$ . Därmed är även  $Q(\mathbf{x}) > 0$  för alla  $\alpha \in (0, 1)$  och satsen är bevisad.

■

I figur 3 avbildas det  $\Phi(\alpha)$  för några olika typer av bortfall. Det framgår av figurerna att även om Shannon-formeln i teorin kan användas till rekonstruktion av alla typer av bortfall för alla nivåer av översampling är determinanten ofta mycket nära noll. Eftersom  $\Phi(\alpha)^{-1}$  konstrueras med hjälp av inversen av determinanten implicerar detta i praktiska tillämpningar att sampelvärdena måste ha motsvarande mätnogrannhet – det kan i vissa fall röra sig om storleksordningen  $10^{-100}$ . Den högra delfiguren demonstrerar att översampling med  $\varphi(t)$  (ekvation (4.2), sida 12) härvidlag ger betydligt bättre förutsättningar.

**Figur 3:** Till vänster har det  $\Phi(\alpha)$  ritats för bortfall av 7 värden, utspridda på olika sätt. Ju mer utspritt bortfallet är, desto större verkar determinanten bli. I den högra figuren visas skillnaden mellan översampling genom Shannon-formeln gentemot då istället översamplingsfiltret  $\varphi(t)$  används; här är bortfallet ett stort antal efterföljande värden.



## 5 Konvergens

Figur 4 visar resultatet då samlingsformeln (3.1) används med ett ändligt antal termer på en funktion som är bandbegränsad just vid Nyquistfrekvensen.<sup>8</sup> Sampelvärdena har centerats kring punkten som ska beräknas:

$$\tilde{s}_N(t) = \sum_{|n-2Bt| \leq N/2} s\left(\frac{n}{2B}\right) \text{sinc}(2Bt - n). \quad (5.1)$$

Varje punkt  $t$  beräknas alltså med  $N/2$  punkter över respektive under  $t$ .<sup>9</sup>

I figur 5 jämförs vanlig sampling med översampling (med översamplingfaktor  $a = 1,5$ ); vi har använt filtret  $\varphi$  enligt (4.2), sida 12.

Det är tydligt att man vid översampling kan få betydligt snabbare konvergens till den ursprungliga funktionen än då vanlig sampling används. Den översamplade rekonstruktionen med 50 termer är till synes bättre än Shannon-rekonstruktionen i figur 4 där tre gånger så många termer används.

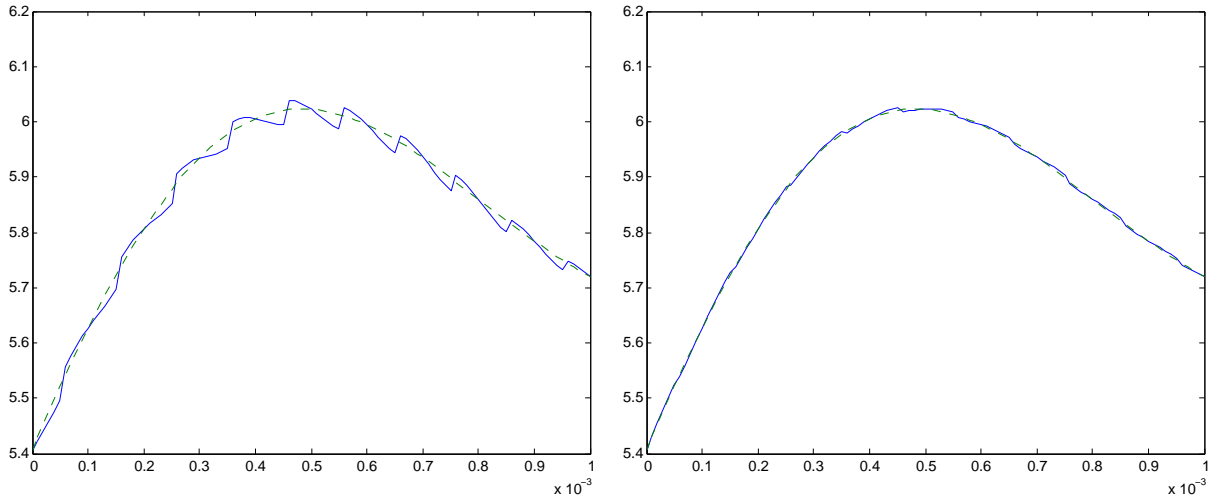
<sup>8</sup>Den funktion som används för figurerna är

$$f(x) = \sum_{n=1}^{5000} \frac{1 - (-1)^n}{n^{1,2}} \cos(nx) + \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n^{1,1}} \sin(nx).$$

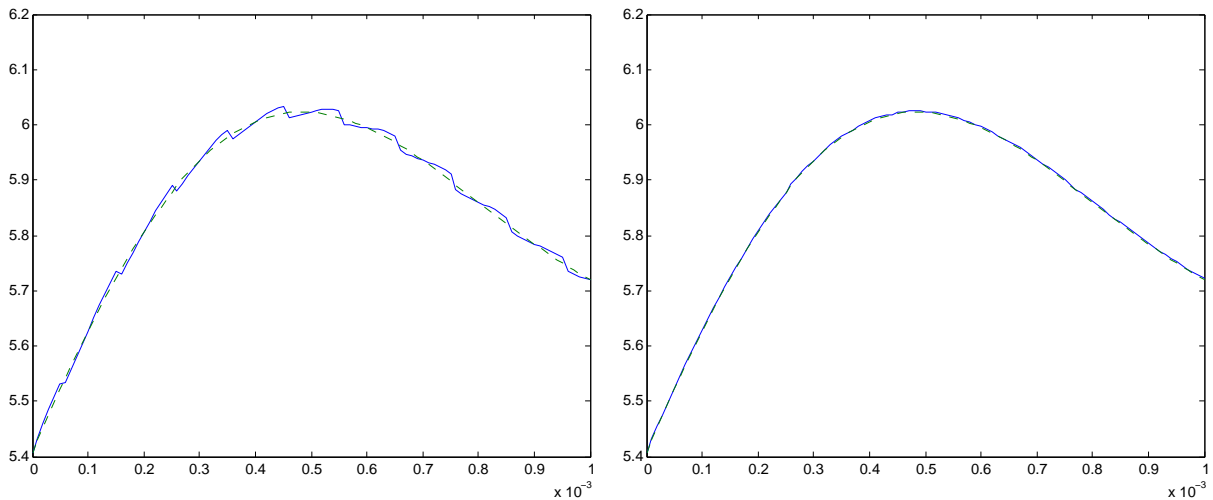
Denna funktion är uppenbarligen bandbegränsad med  $|\omega| \leq 5000$ ; i figurerna används samlingsfrekvensen  $2B = 10^4$ .

<sup>9</sup>Om  $t = \frac{n_0}{2B}$  för något  $n_0 \in \mathbb{Z}$  kommer i själva verket  $N + 1$  termer användas för den punkten. I detta fall, som nämns i anslutning till sats 5, försvinner emellertid alla termer utom  $n = n_0$ .

**Figur 4:** Partiella summer av Shannon-formeln med 25 respektive 150 termer. Den streckade kurvan avbildar den ursprungliga funktionen. Avståndet mellan varje sampelvärde är  $10^{-4}$ .



**Figur 5:** Jämförelse av vanlig sampling (den vänstra figuren) med översampling (till höger) vid  $N = 50$ . Rekonstruktionen medelst översampling ligger alltså redan vid  $N = 50$  mycket nära den ursprungliga funktionen (jämför med figur 4).



## 5.1 Numerisk uppskattning av resttemen i det allmänna fallet

För att undersöka hur snabbt konvergensen sker vid sampling (vanlig eller översampling) undersöker vi hur resttermen ser ut då endast  $2N$  termer används. Härvid utgår vi från den allmänna representationen i ekvation (4.1), sats 7. (Som tidigare nämnts kan Shannons samplingsteorem

härledas från detta som ett specialfall.) Resttermen  $e_{2N}(t)$  fås därmed som

$$e_{2N}(t) = \left| s(t) - \frac{1}{2aB} \sum_{|n-2aBt| \leq N} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(t - \frac{n}{2aB}\right) \right| = \left| \frac{1}{2aB} \sum_{|n-2aBt| > N} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \phi\left(t - \frac{n}{2aB}\right) \right|.$$

Med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet uppskattas detta uppåt till

$$e_{2N}(t) \leq \left( \sum_{|n-2aBt| > N} \left[ \frac{1}{2aB} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \right]^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|n-2aBt| > N} \phi\left(t - \frac{n}{2aB}\right)^2 \right)^{1/2} = S_1^{1/2} \cdot S_2^{1/2}.$$

Vi betraktar nu  $S_1$  och  $S_2$  var för sig. Från beviset av sats 7 vet vi att  $\frac{1}{2aB} s\left(-\frac{n}{2aB}\right)$  är Fourierkoefficienterna till  $\widehat{s}(\omega)$ . Vi använder nu Parsevals formel (sats 3) för att få

$$S_1 = \sum_{|n-2aBt| > N} \left[ \frac{1}{2aB} s\left(\frac{n}{2aB}\right) \right]^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{2aB} s\left(-\frac{n}{2aB}\right) \right]^2 = \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega.$$

Inför beräkningen av den andra summan definierar vi  $\lceil x \rceil$  såsom  $x$  avrundat till närmaste heltal. Sätt nu  $u = n - \lceil 2aBt \rceil$ . Då kan  $S_2$  uppskattas uppåt:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{|u| \geq N} \phi\left(t - \frac{u + \lceil 2aBt \rceil}{2aB}\right)^2 = \sum_{|u| \geq N} \phi\left(\frac{2aBt - \lceil 2aBt \rceil - u}{2aB}\right)^2 = \sum_{|u| \geq N} \phi\left(\xi - \frac{u}{2aB}\right)^2 \\ &= \sum_{|u| \geq N} \phi\left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2, \end{aligned}$$

där  $\xi \in \left[-\frac{0.5}{2aB}, \frac{0.5}{2aB}\right) = \left[-\frac{1}{4aB}, \frac{1}{4aB}\right)$ . Lägg märke till att summeringsintervallet förändrats till  $|u| \geq N$ ; om istället  $|u| > N$  använts skulle en term falla bort från det föregående uttrycket (beroende på huruvida  $\lceil 2aBt \rceil$  avrundas upp eller ner). Sammantaget gäller därmed

$$e_{2N}(t) \leq \left( \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left( \sum_{|u| \geq N} \phi\left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

där den första faktorn i (5.2) är en konstant, givet funktionen  $s(t)$ .

Observera att approximationen ovan endast sätter en övre gräns på feltermen – vid flera räkningar har strävan efter att få ett enkelt uttryck troligen lett till överskattningar av feltermen (exempelvis vid uppskattningen av  $S_1$ .)

## 5.2 Uppskattning av feltermen för vanlig sampling och för översampling

Låt oss först betrakta vanlig sampling med sats 5. Då gäller

$$\phi(x) = 2B \operatorname{sinc} 2Bx$$

och  $a = 1$ , och den andra summan i uttryck (5.2) blir därmed

$$\begin{aligned} \sum_{|u| \geq N} \phi\left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2 &= \sum_{|u| \geq N} \left(2B \frac{\sin 2\pi B \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)}{2\pi B \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{|u| \geq N} \left(\frac{\sin \pi(u - 2B\xi)}{\frac{u}{2B} - \xi}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{(u/2B - \xi)^2}. \end{aligned}$$

Vi vet att  $\xi \in \left[-\frac{1}{4aB}, \frac{1}{4aB}\right)$  och därmed  $|\xi| \leq \frac{1}{4B}$ . Följaktligen kan ovanstående uttryck förenklas genom

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{(u/2B - \xi)^2} \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{(u/4B)^2} = \left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{u^2}.$$

Den sista summan kan integraluppskattas genom att tolka  $\sum_{u=N}^{\infty} (1/u^2)$  som en Riemannundersumma till integralen  $\int_{N-1}^{\infty} (1/x^2) dx$ . Därmed (med användning av symmetrin hos  $1/x^2$ )

$$\left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{u^2} < \left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \cdot 2 \int_{N-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \frac{2}{N-1}.$$

Sammantaget ger det allmänna uttrycket (5.2) för feltermen att

$$\begin{aligned} e_{2N, Sh} &\leq \left(\frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \left(\sum_{|u| \geq N} \phi\left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2\right)^{1/2} \\ &< \left(\frac{1}{2B} \int_{-B}^B |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \left(\left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \frac{2}{N-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \frac{4\sqrt{B}}{\pi} \left(\int_{-B}^B |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Då funktionen istället översamplas med filtret  $\widehat{\varphi}(\omega)$  (se sida 13) får vi följande:

$$\begin{aligned} \sum_{|u| \geq N} \varphi\left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2 &= \sum_{|u| \geq N} \left(\frac{\cos 2\pi B \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right) - \cos 2\pi aB \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)}{2\pi^2 \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^2 (aB - B)}\right)^2 \\ &\leq \sum_{|u| \geq N} \frac{(1+1)^2}{4\pi^4 \left(\frac{u}{2aB} - \xi\right)^4 (aB - B)^2} \leq \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{\pi^4 \left(\frac{u}{4aB}\right)^4 (aB - B)^2} = \frac{(4aB)^4}{\pi^4 (aB - B)^2} \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{u^4}. \end{aligned}$$

På motsvarande sätt som tidigare kan serien integraluppskattas genom

$$\sum_{|u| \geq N} \frac{1}{u^4} < 2 \int_{N-1}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{2}{3(N-1)^3},$$



så sammantaget fås feltermen till

$$\begin{aligned}
e_{2N,\varphi} &\leq \left( \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left( \frac{(4aB)^4}{\pi^4(aB-B)^2} \sum_{|u| \geq N} \frac{1}{u^4} \right)^{1/2} \\
&< \left( \frac{1}{2aB} \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left( \frac{(4aB)^4}{\pi^4(aB-B)^2} \cdot \frac{2}{3(N-1)^3} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{(N-1)^{3/2}} \frac{16(aB)^{3/2}}{\sqrt{3}\pi^2(aB-B)} \left( \int_{-aB}^{aB} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Då vi jämför feltermerna vid vanlig sampling respektive översampling ser vi nu att

$$e_{2N,Sh} < \frac{1}{\sqrt{N-1}} C_1 \quad \text{och} \quad e_{2N,\varphi} < \frac{1}{(N-1)^{3/2}} C_2,$$

där  $C_1$  och  $C_2$  är konstanter. Det är tydligt att både  $e_{2N,Sh}$  och  $e_{2N,\varphi}$  går mot 0 då  $N \rightarrow \infty$ , vilket är i enlighet med sats 5 och 7. Vidare följer också att det finns ett  $N_0$  sådant att  $e_{2N,\varphi} < e_{2N,Sh}$  för alla  $N > N_0$ ; i det exempel som avbildas i figur 5 (sida 18) sker detta alltså redan för något  $N \leq 50$ .

Återigen bör det understrykas att uttrycken för  $e_{2N,Sh}$  och  $e_{2N,\varphi}$  är överskattningar och därmed inte utgör ett formellt bevis för skillnaderna i konvergens mellan vanlig sampling och översampling.

## 6 Rekonstruktion genom *sample-and-hold*

I praktiska tillämpningar där en kontinuerlig funktion måste utvinnas från sampelvärdena blir sats 5 oanvändbart (oändligt många punkter skulle behöva beräknas). Dessutom innehåller samlingsformeln (3.1) termer både före och efter den punkt som ska beräknas vilket ofta är opraktiskt. I detta avsnitt presenteras en metod att approximera  $s(t)$  som är grunden för den rekonstruktion som används vid exempelvis digital ljudrepresentation.

Utgångspunkten är att utvidga serien av sampelvärden  $\{s(\frac{n}{2B})\}_{n \in \mathbb{Z}}$  till en styckvis konstant funktion  $s^*(t)$  (härav termen *sample-and-hold*). Därefter lågpasfiltreras  $s^*(t)$  så att endast frekvenser  $|\omega| \leq B$  återstår.<sup>10</sup> Den resulterande funktionen  $\tilde{s}(t)$  ger på detta sätt en approximation av  $s(t)$ . Formellt:

$$s^*(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \cdot \chi_{[0, \frac{1}{2B})}\left(t - \frac{n}{2B}\right) \quad , \quad \tilde{s}(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}^*(\omega) \cdot \chi_{[-B, +B]}(\omega) \cdot e^{2i\pi\omega t} d\omega.$$

<sup>10</sup>Hur denna lågpasfiltrering hanteras i praktiken diskuteras emellertid inte här.

Vi sätter nu  $\sigma(t) = 2B \cdot \chi_{[0, \frac{1}{2B})}(t)$ . Då är  $s^*(t) = \frac{1}{2B} \sum s(\frac{n}{2B}) \sigma(t - \frac{n}{2B})$ . Vi betraktar nu dess Fouriertransform:

$$\begin{aligned} \widehat{s^*}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \sigma\left(t - \frac{n}{2B}\right) e^{-2i\pi\omega t} \right] dt = \left[ \begin{array}{l} u = t - \frac{n}{2B} \\ du = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2B} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \sigma(u) e^{-2i\pi\omega(u + \frac{n}{2B})} du = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-i\pi\omega n/B} \cdot \int_{\mathbb{R}} \sigma(u) e^{-2i\pi\omega u} du \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-i\pi\omega n/B} \cdot \widehat{\sigma}(\omega). \end{aligned}$$

Tillsammans med definitionen av  $\tilde{s}(t)$  ger detta

$$\widehat{\tilde{s}}(\omega) = \widehat{s^*}(\omega) \cdot \chi_{[-B, +B]}(\omega) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-i\pi\omega n/B} \chi_{[-B, +B]}(\omega) \cdot \widehat{\sigma}(\omega) = \widehat{s}(\omega) \cdot \widehat{\sigma}(\omega) \quad (6.1)$$

där den sista likheten följer från ekvation (3.4), sida 8. Faltningsteoremet ger nu

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u) s(t-u) du = 2B \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0, \frac{1}{2B})}(t) s(t-u) du = 2B \int_0^{\frac{1}{2B}} s(t-u) du = 2B \int_{t-\frac{1}{2B}}^t s(v) dv.$$

På det sista uttrycket kan medelvärdesatsen för integraler tillämpas (vi antar här att  $s(t)$  är kontinuerlig), vilket ger

$$\tilde{s}(t) = 2B \cdot \left( t - \left( t - \frac{1}{2B} \right) \right) \cdot s(\xi) = s(\xi)$$

för något  $\xi \in [t - \frac{1}{2B}, t]$ .  $\tilde{s}(t)$  gör alltså någon form av interpolation mellan sampelvärdena. Notera att  $\xi \rightarrow t$  då  $B \rightarrow \infty$ , så  $s(\xi) \rightarrow s(t)$  då  $B \rightarrow \infty$  om  $s$  är kontinuerlig. (6.1) visar att vi för att undersöka på vilket sätt  $\tilde{s}(t)$  förvanskar den ursprungliga funktionen måste betrakta  $\widehat{\sigma}(\omega)$ :

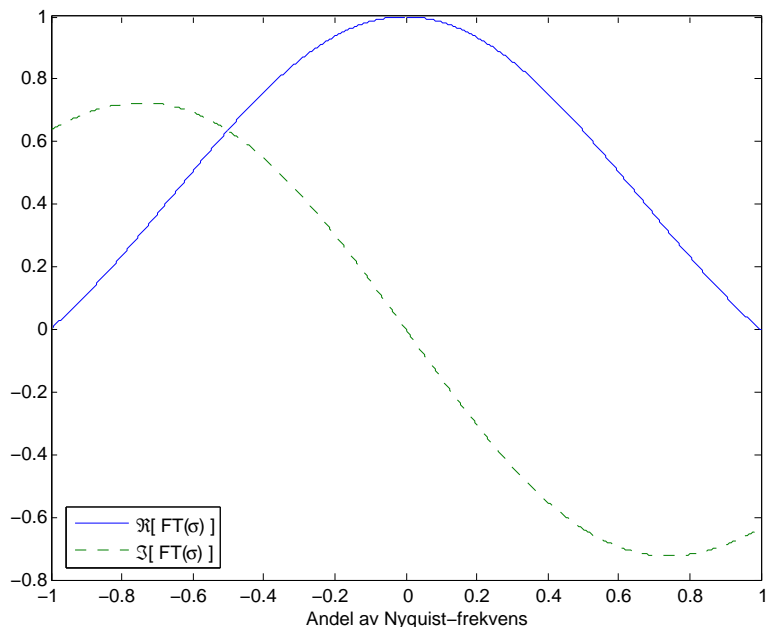
$$\widehat{\sigma}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} 2B \chi_{[0, \frac{1}{2B})}(t) e^{-2i\pi\omega t} dt = 2B \int_0^{\frac{1}{2B}} e^{-2i\pi\omega t} dt = \frac{B}{i\pi\omega} \left( 1 - e^{-i\pi\omega/B} \right)$$

för  $\omega \neq 0$ . För  $\omega = 0$  följer direkt att  $\widehat{\sigma}(0) = 1$ . I figur 6 är  $\widehat{\sigma}(\omega)$  ritad över hela Nyquistfrekvensen – det framgår av figuren att förvrängningen (distorsionen) vid *sample-and-hold* är proportionell mot frekvensen. De högre frekvenserna blir alltså undertryckta och  $\tilde{s}(t)$  är följaktligen en utjämnad version av  $s(t)$ .

Då *sample-and-hold* tillämpas i praktiken används till detta någon slags numerisk approximation av samplingsformeln så att en översamplad signal kommer till *sample-and-hold*-kretsen. Detta ger en de facto fördubblad/flerdubblad Nyquistfrekvens i figur 6, så  $\widehat{\sigma}(\omega)$  kommer att användas med ett snävare intervall kring 0. På detta sätt kan distorsionen minskas betydligt; den återstående distorsionen kan sedan till stor del filtreras bort.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Om *sample-and-hold* används utan översampling krävs mycket kraftig filtrering för att motverka distorsionen av  $\text{Re}[\widehat{\sigma}(\omega)]$  – figur 6 visar att det i princip krävs oändligt stark förstärkning då  $\omega$  går mot Nyquistfrekvensen. Detta resulterar i praktiken i mycket kraftig fasdistorsion. I dagens CD-spelare används översampling från 4-8 gånger upp till en faktor av 128 eller 256.

**Figur 6:** Distorsion vid *sample-and-hold*.



Vid digital sampling tillkommer den ytterligare komplikationen att varje sampelvärde mäts med begränsad precision (bestämmd av det sk *bitdjupet*), vilket ger ytterligare distorsion utöver den som beskrivits i detta avsnitt. En beskrivning av hur detta hanteras ligger emellertid utanför denna uppsats ramar.

## Referenser

- [1] Carleson, Lennart: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966) 135-157.
- [2] Katznelson, Yitzhak: *An Introduction to Harmonic Analysis*, Third ed., Cambridge University Press. Cambridge, 2004.
- [3] Kolmogorov, Andrei: *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, C. R. Acad. Sci. Paris 183 (1926), 1327-1328.
- [4] Rees, Charles Sparks, S. M. Shah & C. V. Stanojevic: *Theory and Applications of Fourier Analysis*, Marcel Dekker Inc. New York, 1981.
- [5] Vretblad, Anders: *Fourier analysis and its applications*, Springer. New York, 2003.