JÄMVIKTSANALYS, AKTIVITETS-ANALYS OCH INPUT-OUTPUT

Av BENGT HÖGLUND

I denna uppsats göres en jämförelse mellan neoklassisk jämviktsanalys, aktivitetsanalys och input-output-analys. Avsikten är att belysa några av relationerna mellan de tre typerna av ekonomisk teori. Utgångspunkten är de produktionstekniska problemens behandling, således hur relationen mellan utnyttjade produktionsfaktorer och uppnådda produktionsresultat anges i de tre fallen. Denna fråga leder i sin tur in på förhållandet mellan jämviktslägen och optimallägen. Endast formella egenskaper hos teorierna diskuteras och frågan om deras realism lämnas utanför, även om vid något tillfälle problem om empirisk anknytning beröres.[1]

Följande beteckningar användes:

p_i = pris på vara i
v_k = pris på primärfaktor k
d_i = slutlig efterfrågan (final demand) på vara i
y_i = slutprodukt av vara i
z_k = total användning av primärfaktor k
r_k = utbud av primärfaktor k
X_i = total produktion av vara i
λ_j = aktivitetsnivå inom process j
x_{ij} = användning av vara i inom sektor (process) j
z_{kj} = användning av primärfaktor k inom sektor (process) j
α_{ij} = nettooutput av vara i inom process j vid aktivitetsnivå 1
b_{kj} = användning av faktor k inom process j vid aktivitetsnivå 1 (sektor j vid totalproduktion 1)
a_{ij} = användning av vara i inom sektor (process) j vid totalproduktion (aktivitetsnivå) 1

[1] Bland litteraturen må särskilt framhållas Robert Dorfman, Paul A. Samuelson and Robert M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, New York 1958, vartill denna uppsats har flera anknytningar.

c_{ki} = användning (total) av primärfaktor k vid framställning av 1 enhet av vara i

n st. varor

m st. processer

l st. primärfaktorer

I. Walras' jämviktssystem

Walras' system är fortfarande aktuellt som ett exempel på jämviktsanalys. Utgångspunkten för detta system är en samling individer, en samling produktionsfaktorer och ett produktionssystem inom vilket faktorerna transformeras till varor. Varje vara och faktor antages ha en viss nytta för var och en av individerna, vilket formuleras i nyttofunktioner, och individerna antages maximera denna nytta. Om nyttofunktionerna är givna kan individernas utbud och efterfrågan uttryckas som funktioner av samtliga priser. Genom sammanläggning för samtliga individer erhålles efterfrågan och utbud för varje vara och faktor som funktioner av samtliga priser.

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ d_2 &= D_2(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_n &= D_n(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ r_2 &= R_2(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_l &= R_l(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \end{aligned} \tag{2}$$

System (1) anger efterfrågan på varor[1] och system (2) utbudet av faktorer. Om nu produktionen av varor antages vara lika med efterfrågan, så gäller för jämvikt på faktorsmarknaden

$$\begin{aligned} c_{11} d_1 + c_{12} d_2 + \cdots + c_{1n} d_n &= r_1 \\ c_{21} d_1 + c_{22} d_2 + \cdots + c_{2n} d_n &= r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_{l1} d_1 + c_{l2} d_2 + \cdots + c_{ln} d_n &= r_l \end{aligned} \tag{3}$$

[1] När vi här och i fortsättningen talar om efterfrågan och utbud för varor avses slutlig efterfrågan respektive utbud av slutprodukter. Med varumarknaden avses på samma sätt marknaden för slutprodukter.

Detta system relaterar således till både varu- och faktorsmarknaden. Slutligen gäller för jämvikt att en varas pris är lika med kostnaden för dess framställning

$$\begin{aligned} c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \cdots + c_{l1} v_l &= p_1 \\ c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \cdots + c_{l2} v_l &= p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \cdots + c_{ln} v_l &= p_n \end{aligned} \tag{4}$$

De fyra systemen innehåller sammanlagt $2n+2l$ ekvationer och lika många variabler. Emellertid är ekvationerna inte oberoende av varandra. Om raderna i (3) successivt multipliceras med $v_1, v_2, \ldots v_l$ och raderna i (4) successivt multipliceras med $d_1, d_2, \ldots d_n$, och systemen därefter adderas var för sig, så erhålles

$$p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots + p_n d_n = v_1 r_1 + v_2 r_2 + \cdots + v_l r_l \tag{5}$$

Om t. ex. priserna är givna och efterfrågan och utbud kända för $n+l-1$ varor och faktorer, så är efterfrågan eller utbudet för den resterande varan eller faktorn också känt. Man har således inte mer än $2n+2l-1$ oberoende ekvationer, vilket medför det bekanta förhållandet att systemen (1)–(4) ej ger absoluta priser, endast relativa.[1]

Utmärkande för de givna produktionsfaktorerna är att de ej produceras inom systemet. För att framhålla detta kallar vi dem primärfaktorer. Koefficienterna c_{ki} anger den totala mängd av en primärfaktor k som användes vid produktion av en enhet av vara i. Ett problem uppstår emellertid om produktionen av en vara fordrar insatser inte bara av primärfaktorer utan även av råvaror och halvfabrikat som själva är producerade inom systemet. Då produktionen av dessa senare i sin tur fordrar insatser av primärfaktorer och sannolikt också av producerade råvaror och halvfabrikat, vilka i sin tur fordrar insatser av samma typer osv., uppstår via dessa typer av produktionsinsatser en indirekt användning av primärfaktorer. Koefficienterna c_{ki} skall avse den totala användningen, således både den som sker direkt och indirekt. Walras anger hur detta problem i princip kan lösas genom en successiv »tillbakaräkning» via utnyttjade råvaror och halvfabrikat tills man slutligen er-

[1] Léon Walras, Elements of Pure Economics, or the Theory of Social Wealth, Translated by William Jaffé, Norvich 1954, spec. sid. 237–242. Framställningen följer inte originalet i detalj, bl. a. är beteckningarna anpassade till den här avsedda användningen.

håller uppgift om den totala förbrukningen av primärfaktorer, ett tillvägagångssätt som genom det hastigt växande antalet nödvändiga räkneoperationer kan vålla stora praktiska svårigheter.[1]

En annan komplikation beträffande produktionskoefficienterna inträffar om man släpper antagandet att de är givna i systemet. Walras själv betraktar detta antagande som ett provisorium vars främsta uppgift är att förenkla framställningen. Senare skisserar han hur systemet kan byggas ut genom att låta produktionskoefficienterna bestämmas genom ett optimeringsförfarande analogt med det som användes för att härleda individernas efterfrågan och utbud. I fråga om produktionsfaktorerna antages företagarna minimera produktionskostnaden och användningen av faktorerna bestäms av relationer som uttrycker villkor för detta. Olika sammansättningar och omfattningar av produktionen leder då i allmänhet till olika kombinationer av primärfaktorer och koefficienterna c_{kt} kan inte längre betraktas som givna.[2]

II. Ett generellare jämviktssystem

Ett sätt att närma sig problemet om vilka mängder av produktionsfaktorer som användes för en viss produktion är att mera specifikt ange vilka insatser av råvaror, halvfabrikat och primärfaktorer produktionen fordrar.

Vi antar som tidigare att det finns n st. varor som tillverkas inom produktionssystemet och l st. primärfaktorer som tillförs systemet utifrån. För varorna antas att de dels kan användas som produktionsinsatser inom systemet, dels kan levereras ut ur systemet i form av slutprodukter. Produktionssystemet antages vara sammansatt av en samling elementära produktionsprocesser. En sådan process motsvarar allmänt uttryckt ett sätt att framställa en vara eller en kombination av varor. Den karakteriseras med hjälp av den relation som gäller mellan tillverkning och förbrukning av varor och primärfaktorer, så att varje sådan relation konstituerar en bestämd produktionsprocess.

Med aktivitetsnivå för en process avses den omfattning i vilken processen användes. Vid en given aktivitetsnivå för en process framkommer

[1] Walras a. a. sid. 241.
[2] Walras a. a. sid. 240 och 383 o. ff.

en viss nettoproduktion respektive nettoanvändning av varje vara och faktor. Dessa nettovärden anges med ett tal för varje vara och faktor. Vi väljer en godtycklig nivå som enhetsnivå och tecknar den med vektorn

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdots \\ \alpha_{nj} \\ -b_{1j} \\ -b_{2j} \\ \cdots \\ -b_{lj} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ett positivt element anger att varan är en nettooutput inom processen, ett negativt element att varan eller faktorn är en nettoinput inom processen. Ett element med värdet noll anger att varan eller faktorn inte berörs av processen. Elementen α_{ij} antages kunna vara positiva, negativa eller noll, elementen b_{kj} endast non-negativa. De senare avser således primärfaktorer.

För varje process antages gälla proportionalitet mellan input och output. En given aktivitetsnivå kan då uttryckas genom att vektorn $A^{(j)}$ multipliceras med en faktor λ_j. Denna antages kunna ha alla non-negativa värden.

Processerna antages vidare vara additiva, innebärande att produktionsstrukturen inom en process är oberoende av aktivitetsnivåerna inom övriga processer. Om man alltså utnyttjar två eller flera processer samtidigt, så kommer totala resultatet för en vara eller faktor att bli lika med summan av output respektive input inom de enskilda processerna. Formellt kan detta uttryckas så, att för två givna processer i och j, representerade av vektorerna $A^{(i)}$ och $A^{(j)}$, existerar det en tredje process som kan representeras genom en (positiv) lineär kombination av $A^{(i)}$ och $A^{(j)}$.

Omvändningen till detta gäller inte. Vi antar i stället att det finns m st. processer som inte kan representeras genom (positiva) lineära kombinationer av vektorerna för övriga processer inom systemet. Hela produktionssystemet kan då representeras av m st. vektorer $A^{(j)}$.

Med dessa antaganden kan resultatet av en given användning av hela produktionssystemet uttryckas genom multiplikation av varje vektor $A^{(j)}$

med λ_j och efterföljande addering. För varje vara ger detta slutprodukten, dvs. den mängd av totala produkten som återstår efter avdrag för vad som använts som insatser inom systemet, och för varje primärfaktor den totalt använda mängden. Man får för varor

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m &= y_1 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m &= y_n \end{aligned} \tag{7}$$

och för primärfaktorer

$$\begin{aligned} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \cdots + b_{1m}\lambda_m &= z_1 \\ b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \cdots + b_{2m}\lambda_m &= z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}\lambda_1 + b_{l2}\lambda_2 + \cdots + b_{lm}\lambda_m &= z_l \end{aligned} \tag{8}$$

System (7) anger utbudet av varor och system (8) efterfrågan på primärfaktorer vid givna aktivitetsnivåer. Tillsammans karakteriserar systemen de produktionstekniska sambanden, och vi kan därför säga att de utgör en produktionsmodell.[1]

Vi utnyttjar nu denna produktionsmodell i ett jämviktssystem, vilket är mer generellt än det ursprungliga Walras-systemet och som vi därför i fortsättningen kallar det *generella systemet*. Efterfrågan på varor är en funktion av samtliga priser

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ d_2 &= D_2(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_n &= D_n(p_1, p_2, \ldots p_n, v_1, v_2, \ldots v_l) \end{aligned} \tag{1}$$

Villkor för jämvikt på varumarknaden är att efterfrågan är lika med utbud för varje vara

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m &= d_1 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m &= d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m &= d_n \end{aligned} \tag{9}$$

[1] För en systematisk behandling av en lineär produktionsmodell av denna typ hänvisas till Tjalling C. Koopmans, Three Essays on the State of Economic Science, New York 1957, speciellt sid. 66 o. ff.

Utbudet av primärfaktorer är en funktion av samtliga priser

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1(p_1, p_2, \dots p_n, v_1, v_2, \dots v_l) \\ r_2 &= R_2(p_1, p_2, \dots p_n, v_1, v_2, \dots v_l) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_l &= R_l(p_1, p_2, \dots p_n, v_1, v_2, \dots v_l) \end{aligned} \tag{2}$$

Villkor för jämvikt på faktorsmarknaden är att efterfrågan är lika med utbud för varje faktor

$$\begin{aligned} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \cdots + b_{1m}\lambda_m &= r_1 \\ b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \cdots + b_{2m}\lambda_m &= r_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{l1}\lambda_1 + b_{l2}\lambda_2 + \cdots + b_{lm}\lambda_m &= r_l \end{aligned} \tag{10}$$

En jämförelse med det ursprungliga systemet visar att (1) och (2) förekommer i båda fallen. Däremot har (3), som innehåller relationen mellan produktion av en viss mängd varor och förbrukningen av primärfaktorer, splittrats upp på de två systemen (9) och (10). Det förra innehåller relationen mellan aktivitetsnivåer och produktionen av varor, det senare relationen mellan aktivitetsnivåer och förbrukningen av primärfaktorer. Genom att aktivitetsnivåerna kommit in som ett mellanled mellan vara och primärfaktor känner vi nu inte direkt storleken på koefficienterna c_{ki}. Vi kan därför inte använda system (4), som stipulerade att priset på en vara skall vara lika med kostnaden för de primärfaktorer som åtgår för varans framställning. Men vi kan sätta upp ett liknande system, som för varje process anger att värdet av produktionen skall vara lika med dess kostnad

$$\begin{aligned} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n &= b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l \\ \alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n &= b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n &= b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l \end{aligned} \tag{11}$$

Vi har nu i allt $2n+2l+m$ st. ekvationer i lika många variabler (n st. p_i, n st. d_i, l st. v_k, l st. r_k, m st. λ_j). Emellertid gäller även här att ekvationerna ej är oberoende av varandra. Om raderna i (9) successivt multipliceras med $p_1, p_2, \dots p_n$, och raderna i (11) successivt multipliceras med $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, och addering därefter sker, så erhålles

$$\begin{aligned} p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots + p_n d_n = \; & v_1 (b_{11} \lambda_1 + b_{12} \lambda_2 + \cdots + b_{1m} \lambda_m) \\ & + v_2 (b_{21} \lambda_1 + b_{22} \lambda_2 + \cdots + b_{2m} \lambda_m) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + v_l (b_{l1} \lambda_1 + b_{l2} \lambda_2 + \cdots + b_{lm} \lambda_m) \end{aligned} \tag{12}$$

eller, enligt (10),

$$p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots + p_n d_n = v_1 r_1 + v_2 r_2 + \cdots + v_l r_l \tag{5}$$

som också härleddes ur det ursprungliga jämviktssystemet och har samma innebörd som där.

III. Två optimeringsprogram

Detta nya system kommer nu att användas till en jämförelse mellan jämviktsanalys och aktivitetsanalys i form av lineär programmering. Lineär programmering är en metod för maximering eller minimering av en lineär funktion av en samling variabler under förutsättning att variablerna uppfyller vissa lineära sidovillkor, vanligen uttryckta i form av olikheter. Typiska problem för sådana program är att med minsta kostnad uppnå ett visst mål eller att på bästa sätt utnyttja en given mängd resurser.

I varje sådant program ingår således en funktion som skall minimeras eller maximeras. Den kallas här *målfunktion* (objective function). Vidare säger vi att värden på variablerna som tillfredsställer sidovillkoren utgör en *möjlig* lösning (feasable solution) till programmet. Om de dessutom tillfredsställer målfunktionen utgör de en *optimal* lösning (optimal solution).

Till varje lineärt optimeringsprogram kan uppställas ett *dualt* program, vilket erhålles från det ursprungliga genom följande operationer.

a) En ny variabel införes för varje sidovillkor i det ursprungliga programmet.

b) Som koefficientmatris i sidovillkoren användes den transponerade koefficientmatrisen i det ursprungliga programmet.

c) Som restriktioner i sidovillkoren användes koefficienterna i det ursprungliga programmets målfunktion.

d) Som koefficienter i den nya målfunktionen användes restriktionerna i det ursprungliga programmets sidovillkor.

e) Målfunktionen ändras från min till max eller vice versa.

f) Riktningen för olikhetstecknen i sidovillkoren ändras, med undantag för villkoret om non-negativa variabler.

Relationen dual är symmetrisk, så att två program mellan vilka ovan angivna relationer gäller är duala till varandra.

För två duala program gäller bl. a. följande.

1. Om det existerar möjliga lösningar till båda programmen, så existerar det optimala lösningar till båda.
2. Om det existerar en optimal lösning till det ena programmet, så existerar det en optimal lösning till det andra.
3. Om P är värdet på målfunktionen för maximeringsprogrammet och Q värdet på målfunktionen för minimeringsprogrammet, så gäller $P \leq Q$.
4. Om båda programmen har optimala lösningar, så ger dessa lika värden på målfunktionerna.[1]

Vi kommer att i fortsättningen utnyttja dessa egenskaper och referera till dem som punkt 1, 2, 3 och 4.

Med hjälp av de termer som utnyttjats i det generella jämviktssystemet kommer vi nu att formulera två lineära optimeringsprogram och deras duala program samt försöka uttrycka villkoren för optimala lösningar i jämviktssystemets termer. Som första problem väljer vi framställning av en given mängd slutprodukter till minsta möjliga kostnad. Låt den givna mängden slutprodukter vara $d_1, d_2, \dots d_n$. Kostnaden för en given aktivitetsnivå utgöres av värdet av de primärfaktorer som användes. Ett uttryck härför erhålles genom att multiplicera raderna i (8) med faktorspriserna $v_1, v_2, \dots v_l$ och addera över de olika faktorerna. Problemet att välja den aktivitetsnivå för vilken de givna mängderna slutprodukter framställes till minsta möjliga kostnad kan nu formuleras på följande sätt

$$\begin{aligned}
&(b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \cdots + b_{l1} v_l)\lambda_1 \\
&+ (b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \cdots + b_{l2} v_l)\lambda_2 \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ (b_{1m} v_1 + b_{2m} v_2 + \cdots + b_{lm} v_l)\lambda_m = \min
\end{aligned} \tag{13}$$

[1] Jfr t. ex. Dorfman, Samuelson and Solow a. a. Kap. 3 och 4, spec. sid. 39–41 och 100–104.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m \geq d_1\\
&\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m \geq d_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m \geq d_n
\end{aligned} \tag{9a}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m \geq 0 \tag{14}$$

Givna är d_i och v_k. Detta program kallas *program I.*

Vi ställer nu upp det duala programmet och låter faktorspriserna v_k vara de nya variablerna. Det visar sig då att en modifierad form av system (11) erhålles som sidovillkor.

$$d_1 p_1 + d_2 p_2 + \cdots + d_n p_n = \max \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n \leq b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l\\
&\alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n \leq b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n \leq b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l
\end{aligned} \tag{11a}$$

$$p_1, p_2, \cdots p_n \geq 0 \tag{12}$$

Här är fortfarande d_i och v_k givna. I ord säger detta program att de givna mängderna av varor skall tilldelas non-negativa priser så att sammanlagda värdet av dem blir så stort som möjligt utan att någon process lämnar överskott.

Antag nu att $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$ ger en optimal lösning till program I. Enligt punkt 2 sidan 90 existerar det då en optimal lösning till det duala programmet. Antag att den inträffar för värdena $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_n$. Enligt punkt 4 gäller

$$\begin{aligned}
&(b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l)\bar{\lambda}_1\\
&+ (b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l)\bar{\lambda}_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ (b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l)\bar{\lambda}_m = d_1\bar{p}_1 + d_2\bar{p}_2 + \cdots + d_n\bar{p}_n
\end{aligned} \tag{17}$$

Vidare gäller sidovillkoren till båda programmen

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{12}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{1m}\bar{\lambda}_m \geq d_1\\
&\alpha_{21}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{22}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{2m}\bar{\lambda}_m \geq d_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{n1}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{n2}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{\lambda}_m \geq d_n
\end{aligned} \tag{9a'}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\bar{p}_1 + \alpha_{21}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\bar{p}_n \leq b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l\\
&\alpha_{12}\bar{p}_1 + \alpha_{22}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\bar{p}_n \leq b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{1m}\bar{p}_1 + \alpha_{2m}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{p}_n \leq b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l
\end{aligned} \tag{11a'}$$

Multiplicera raderna i (9a′) successivt med $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots \bar{p}_n$, addera de n olikheterna, skriv om vänstra sidan samt kombinera det erhållna uttrycket med (17)

$$\begin{array}{ll} (\alpha_{11}\bar{p}_1 + \alpha_{21}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\bar{p}_n)\bar{\lambda}_1 \geq & (b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l)\bar{\lambda}_1 \\ + (\alpha_{12}\bar{p}_1 + \alpha_{22}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\bar{p}_n)\bar{\lambda}_2 & + (b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l)\bar{\lambda}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ + (\alpha_{1m}\bar{p}_1 + \alpha_{2m}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{p}_n)\bar{\lambda}_m & + (b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l)\bar{\lambda}_m \end{array} \tag{18}$$

Jämför detta uttryck med (11a′). För att både (18) och (11a′) skall gälla måste antingen likhetstecken gälla i varje rad i (11a′) eller måste motsvarande $\bar{\lambda}_j$ i (18) vara noll. Om således kostnaderna för framställning av en given slutprodukt minimeras och motsvarande duala program har optimal lösning, så är intäkter lika med kostnader för varje använd process.

Multiplicera nu raderna i (11a′) successivt med $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots \bar{\lambda}_m$, addera de m olikheterna, skriv om vänstra sidan samt kombinera med (17)

$$\begin{array}{l} (\alpha_{11}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{12}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{1m}\bar{\lambda}_m)\bar{p}_1 \\ + (\alpha_{21}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{22}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{2m}\bar{\lambda}_m)\bar{p}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ + (\alpha_{n1}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{n2}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{\lambda}_m)\bar{p}_n \leq d_1\bar{p}_1 + d_2\bar{p}_2 + \cdots + d_n\bar{p}_n \end{array} \tag{19}$$

Jämför detta uttryck med (9a′). För att både (19) och (9a′) skall gälla måste antingen likhetstecken gälla i varje rad i (9a′) eller måste motsvarande $\bar{p}_i$ i (19) vara noll. Detta kan i termer som ansluter till jämviktssystemet uttryckas så: Om kostnaderna för framställning av en given mängd varor minimeras och motsvarande duala program har optimal lösning, så är utbud lika med efterfrågan för varje icke-fri vara. Därvid har utbud antagits vara lika med framställning.

Vi har nu visat att nödvändiga villkor för att kostnadsminimeringsprogrammet och dess duala program skall ha optimala lösningar är att utbud, i betydelsen framställning, är lika med efterfrågan för varje icke-fri vara och att intäkter är lika med kostnader för varje använd process. Vi skall nu undersöka om dessa villkor också är tillräckliga. Detta sker i två etapper. Först diskuteras ett speciellt fall och därefter görs erforderliga modifikationer i detta. Antag att $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots \bar{\lambda}_m$ och $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots \bar{p}_n$ är non-negativa värden på variablerna som satisfierar sidovillkoren till de båda programmen med likhetstecken överallt så att vi har

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{12}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{1m}\bar{\lambda}_m = d_1 \\
&\alpha_{21}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{22}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{2m}\bar{\lambda}_m = d_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_{n1}\bar{\lambda}_1 + \alpha_{n2}\bar{\lambda}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{\lambda}_m = d_n
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}\bar{p}_1 + \alpha_{21}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\bar{p}_n = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l \\
&\alpha_{12}\bar{p}_1 + \alpha_{22}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\bar{p}_n = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_{1m}\bar{p}_1 + \alpha_{2m}\bar{p}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\bar{p}_n = b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l
\end{aligned}
\tag{11'}
$$

Genom successiv multiplicering av raderna i (9′) med $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_n$ och raderna i (11′) med $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$, addering av ekvationerna i de två systemen var för sig samt sammanställning av de två erhållna uttrycken får man

$$
\begin{aligned}
&(b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{l1}v_l)\bar{\lambda}_1 \\
&+ (b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{l2}v_l)\bar{\lambda}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (b_{1m}v_1 + b_{2m}v_2 + \cdots + b_{lm}v_l)\bar{\lambda}_m = d_1\bar{p}_1 + d_2\bar{p}_2 + \cdots + d_n\bar{p}_n
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Vänstra sidan är målfunktionen i program I, högra sidan är målfunktionen i det duala programmet. För de givna variabelvärdena kommer således de båda målfunktionerna att vara lika. Av punkt 3 på sidan 90 följer att detta värde är optimalt och att de givna värdena på variablerna är optimala lösningar till programmen.

Antag nu att för en process, vilken som helst, intäkter är mindre än kostnader och att processen ej användes, samt att för övriga processer gäller att intäkter är lika med kostnader och för alla varor produktion är lika med efterfrågan. Formellt uttryckes detta genom att olikhet ($<$) gäller i en rad i (11a) och att motsvarande $\bar{\lambda}_j$ är noll samt att likhet råder överallt eljest i sidovillkoren. Genom den successiva multiplikationen av raderna i (11a) med $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$ kommer just den rad som innehåller olikheten att multipliceras med noll, och därmed försvinner effekten av olikheten så att man på nytt erhåller likheten (17) som implicerar optimala lösningar. Precis motsvarande gäller för fria varor och för kombinationer av fria varor och ej använda processer. Därmed är visat att de tidigare som nödvändiga angivna villkoren också är tillräckliga. Vi kan alltså skriva:

> Tillräckliga och nödvändiga villkor för att kostnadsminimeringsprogrammet och dess duala program skall ha optimala lösningar

är att utbud (framställning) är lika med efterfrågan för varje icke-fri vara och att intäkter är lika med kostnader för varje använd process.

I det hittills diskuterade optimeringsprogrammet gällde det att framställa en given slutprodukt till minsta möjliga kostnad. Vi tänker oss nu i stället ett fall där en viss mängd primärfaktorer är givna och där problemet är att utnyttja dessa på bästa sätt. Kriteriet härpå antages vara värdet av den slutprodukt som framställes. Detta kan med hjälp av termerna i det generella jämviktssystemet formuleras som ett lineärt optimeringsprogram av följande utseende

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_n y_n = \max \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m &= y_1 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m &= y_n \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \cdots + b_{1m}\lambda_m &\leq r_1 \\ b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \cdots + b_{2m}\lambda_m &\leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}\lambda_1 + b_{l2}\lambda_2 + \cdots + b_{lm}\lambda_m &\leq r_l \end{aligned}\right. \tag{10a}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m \geq 0 \tag{14}$$

$$y_1, y_2, \cdots y_n \geq 0 \tag{21}$$

Givna är p_i och r_k.

Här uppstår problemet att målfunktionen (20) är uttryckt i variablerna y_i medan sidovillkoren är uttryckta i variablerna λ_j. Genom (7) finns emellertid en relation mellan y_i och λ_j som kan användas till att uttrycka y_i i λ_j. Däremot kan den inte utan vidare användas till att uttrycka λ_j i y_i, eftersom en viss slutprodukt i allmänhet motsvaras av mer än en aktivitetsnivå, system (7) har i allmänhet ingen entydig lösning. Vi formulerar därför programmet i variablerna λ_j på följande sätt och kallar det *program II.*

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n)\lambda_1 \\ +&(\alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n)\lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +&(\alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n)\lambda_m = \max \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{array}{l} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \cdots + b_{1m}\lambda_m \leq r_1 \\ b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \cdots + b_{2m}\lambda_m \leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}\lambda_1 + b_{l2}\lambda_2 + \cdots + b_{lm}\lambda_m \leq r_l \end{array} \qquad (10a)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m \geq 0 \qquad (14)$$

Denna formulering är dock inte ekvivalent med den tidigare och inte användbar för ett maximeringsförfarande från utgångspunkter som motsvarar förutsättningarna för det generella jämviktssystemet. Den tar nämligen inte hänsyn till det tekniska beroendet mellan utnyttjandet av olika processer. Varje lösning som är möjlig i den förra formuleringen är också möjlig i den senare men omvändningen gäller inte.

För att få överensstämmelse med förutsättningarna i jämviktssystemet måste man fordra att de enda tillskott som tillföres systemet utifrån är de med r_k angivna primärfaktorerna. All förbrukning av varor som kan vara föremål för produktion inom systemet måste alltså också framställas inom systemet under samma period som maximeringen avser och ej tagas från lager eller dylikt. Problemet får sin motsvarighet i det duala programmet som senare skall formuleras. Där är problemet att tilldela primärfaktorerna non-negativa priser så att sammanlagda värdet av dem blir så litet som möjligt under förutsättning att för varje process kostnaderna ej är mindre än intäkterna. Om man tillåter andra bidrag utifrån till systemet än de med r_k betecknade primärfaktorerna, t. ex. från lager av varor som regelmässigt tillverkas inom systemet, så måste dessa betraktas som en form av primärfaktorer vilka i det duala programmet också skall tilldelas priser.

Formellt kan dessa svårigheter lösas genom att till programmet foga n st. sidovillkor som säger att slutprodukterna (uttryckta i λ_j) skall vara non-negativa och i det duala programmet införa n st. nya variabler. Detta skulle göra uttrycken mera svårhanterliga, och då det inte är nödvändigt för de speciella problem vi vill belysa här, nämligen förhållandet mellan optimallägen och jämviktslägen, avstår vi därifrån. Vi gör i stället den förutsättningen, att primärfaktorerna r_k är de enda bidrag systemet mottar utifrån och samtidigt de enda faktorer som kan tilldelas priser i det duala programmet. Denna förutsättning gäller under hela den följande diskussionen av program II och dess duala program.

Vi bildar nu det duala programmet till program II och låter faktorspriserna v_k vara nya variabler. Som sidovillkor uppträder då på nytt en modifierad form av system (11).

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_l v_l = \min \tag{23}$$

$$\begin{array}{l} b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \cdots + b_{l1} v_l \geq \alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2 + \cdots + \alpha_{n1} p_n \\ b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \cdots + b_{l2} v_l \geq \alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \cdots + \alpha_{n2} p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1m} v_1 + b_{2m} v_2 + \cdots + b_{lm} v_l \geq \alpha_{1m} p_1 + \alpha_{2m} p_2 + \cdots + \alpha_{nm} p_n \end{array} \tag{11a}$$

$$v_1, v_2, \cdots v_l \geq 0 \tag{24}$$

Fortfarande är p_i och r_k givna. Som redan nämnts säger detta program att primärfaktorerna skall tilldelas non-negativa priser så att sammanlagda värdet av dem blir så litet som möjligt under förutsättning att för varje process kostnaderna ej är mindre än intäkterna.

Vi kan nu genomföra en diskussion av detta program som är helt analog med diskussionen av program I. Antag att $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$ utgör en optimal lösning till program II. Enligt punkt 2 sidan 90 existerar det då en optimal lösning till det duala programmet. Antag att den inträffar för värdena $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_l$. Enligt punkt 4 sidan 90 gäller då

$$\begin{array}{l} (\alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2 + \cdots + \alpha_{n1} p_n) \bar{\lambda}_1 \\ + (\alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \cdots + \alpha_{n2} p_n) \bar{\lambda}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (\alpha_{1m} p_1 + \alpha_{2m} p_2 + \cdots + \alpha_{nm} p_n) \bar{\lambda}_m = r_1 \bar{v}_1 + r_2 \bar{v}_2 + \cdots + r_l \bar{v}_l \end{array} \tag{25}$$

Vidare gäller sidovillkoren för båda programmen

$$\begin{array}{l} b_{11} \bar{\lambda}_1 + b_{12} \bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{1m} \bar{\lambda}_m \leq r_1 \\ b_{21} \bar{\lambda}_1 + b_{22} \bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{2m} \bar{\lambda}_m \leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1} \bar{\lambda}_1 + b_{l2} \bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{lm} \bar{\lambda}_m \leq r_l \end{array} \tag{10a'}$$

$$\begin{array}{l} b_{11} \bar{v}_1 + b_{21} \bar{v}_2 + \cdots + b_{l1} \bar{v}_l \geq \alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2 + \cdots + \alpha_{n1} p_n \\ b_{12} \bar{v}_1 + b_{22} \bar{v}_2 + \cdots + b_{l2} \bar{v}_l \geq \alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \cdots + \alpha_{n2} p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1m} \bar{v}_1 + b_{2m} \bar{v}_2 + \cdots + b_{lm} \bar{v}_l \geq \alpha_{1m} p_1 + \alpha_{2m} p_2 + \cdots + \alpha_{nm} p_n \end{array} \tag{11a''}$$

Multiplicera raderna i (10a′) successivt med $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_l$, addera de l olikheterna, skriv om vänstra sidan samt kombinera det erhållna uttrycket med (25)

$$
\begin{array}{ll}
(b_{11}\bar{v}_1 + b_{21}\bar{v}_2 + \cdots + b_{l1}\bar{v}_l)\bar{\lambda}_1 \leq & (\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n)\bar{\lambda}_1 \\
+ (b_{12}\bar{v}_1 + b_{22}\bar{v}_2 + \cdots + b_{l2}\bar{v}_l)\bar{\lambda}_2 & + (\alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n)\bar{\lambda}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ (b_{1m}\bar{v}_1 + b_{2m}\bar{v}_2 + \cdots + b_{lm}\bar{v}_l)\bar{\lambda}_m & + (\alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n)\bar{\lambda}_m
\end{array}
\qquad (26)
$$

Jämför detta uttryck med (11a″). Om både (26) och (11a″) skall gälla, så måste antingen likhetstecken gälla i varje rad i (11a″) eller måste motsvarande $\bar{\lambda}_j$ i (26) vara noll. Med andra ord: Om maximeringsprogrammet och dess duala program har optimala lösningar, så är intäkter lika med kostnader för varje process som användes.

Multiplicera nu raderna i (11a″) successivt med $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$, addera de m olikheterna, skriv om vänstra sidan samt kombinera det erhållna uttrycket med (25)

$$
\begin{array}{l}
(b_{11}\bar{\lambda}_1 + b_{12}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{1m}\bar{\lambda}_m)\bar{v}_1 \\
+ (b_{21}\bar{\lambda}_1 + b_{22}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{2m}\bar{\lambda}_m)\bar{v}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ (b_{l1}\bar{\lambda}_1 + b_{l2}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{lm}\bar{\lambda}_m)\bar{v}_l \quad \geq r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_l\bar{v}_l
\end{array}
\qquad (27)
$$

Jämför detta uttryck med (10a′). För att både (27) och (10a′) skall gälla måste antingen likhetstecken råda i varje rad i (10a′) eller måste motsvarande $\bar{v}_k$ i (27) vara noll. Om således maximeringsprogrammet och dess duala program har optimala lösningar, så utnyttjas varje icke-fri primärfaktor fullständigt. Eller i termer som mer direkt ansluter till jämviktssystemet: Om maximeringsprogrammet och dess duala program har optimala lösningar, så är utbud lika med efterfrågan för varje icke-fri primärfaktor.

Därmed är visat att nödvändiga villkor för att produktmaximeringsprogrammet och dess duala program skall ha optimala lösningar är att varje icke-fri primärfaktor utnyttjas fullt och att intäkter är lika med kostnader för varje använd process. Återstår att visa att dessa villkor också är tillräckliga. Detta sker liksom för program I i två etapper. Antag att $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$ och $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_l$ är non-negativa värden på variablerna som satisfierar sidovillkoren till de båda programmen med likhetstecken överallt så att vi har

$$\begin{aligned} b_{11}\bar{\lambda}_1 + b_{12}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{1m}\bar{\lambda}_m &= r_1 \\ b_{21}\bar{\lambda}_1 + b_{22}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{2m}\bar{\lambda}_m &= r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}\bar{\lambda}_1 + b_{l2}\bar{\lambda}_2 + \cdots + b_{lm}\bar{\lambda}_m &= r_l \end{aligned} \tag{10'}$$

$$\begin{aligned} b_{11}\bar{v}_1 + b_{21}\bar{v}_2 + \cdots + b_{l1}\bar{v}_l &= \alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n \\ b_{12}\bar{v}_1 + b_{22}\bar{v}_2 + \cdots + b_{l2}\bar{v}_l &= \alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1m}\bar{v}_1 + b_{2m}\bar{v}_2 + \cdots + b_{lm}\bar{v}_l &= \alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n \end{aligned} \tag{11''}$$

Genom successiv multiplicering av raderna i (10′) med $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_l$ och raderna i (11″) med $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_m$, addering av ekvationerna i de två systemen var för sig, samt sammanställning av de två erhållna uttrycken får man

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \cdots + \alpha_{n1}p_n)\bar{\lambda}_1 \\ &+ (\alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{n2}p_n)\bar{\lambda}_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (\alpha_{1m}p_1 + \alpha_{2m}p_2 + \cdots + \alpha_{nm}p_n)\bar{\lambda}_m = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_l\bar{v}_l \end{aligned} \tag{25}$$

Vänstra sidan är målfunktionen i program II, högra sidan är målfunktionen i det duala programmet. För de givna värdena på variablerna kommer alltså de båda målfunktionerna att vara lika. Av punkt 3 på sidan 90 följer att detta värde är optimalt och att de givna värdena på variablerna är optimala lösningar till programmen.

Antag nu t. ex. att den tillgängliga mängden av en primärfaktor, vilken som helst, är större än den mängd som efterfrågas i produktionen och att dess pris är noll, medan i övrigt samma villkor som tidigare gäller. Detta uttryckes formellt genom att olikhet ($<$) gäller i en rad i (10a) och att motsvarande $\bar{v}_k$ är noll samt att likhet råder överallt eljest i sidovillkoren (10a) och (11a). Genom den successiva multiplikationen av raderna i (10a) med $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_l$ kommer just den rad som innehåller olikheten att multipliceras med noll, varigenom effekten av olikheten försvinner så att man på nytt erhåller likheten (25) vilken implicerar optimala lösningar. Precis motsvarande gäller för processer som ej användes och för kombinationer av fria primärfaktorer och ej använda processer. Därmed är det visat att de tidigare som nödvändiga angivna villkoren också är tillräckliga, och vi kan skriva:

Tillräckliga och nödvändiga villkor för att produktmaximeringsprogrammet och dess duala program skall ha optimala lösningar är att varje icke-fri primärfaktor utnyttjas fullständigt och att intäkter är lika med kostnader för varje använd process.

Diskussionen har förts i två etapper med anknytning till två lineära optimeringsprogram, för vilka villkoren för optimala lösningar har undersökts. Dessa villkor har uttryckts i former som motsvarar uttryckssätten inom jämviktssystemen. Man kan säga att en ansats därigenom gjorts till jämviktsteoretisk tolkning av optimalvillkoren.

Går man nu tillbaka till det generella jämviktssystemet och betraktar (9), (10) och (11), så finner man att jämvikt innebär att tillräckliga villkor för optimala lösningar till båda optimeringsprogrammen och deras duala program är uppfyllda. Jämvikt implicerar optimala lösningar. Däremot är, såsom framgått, jämvikt i meningen att (9), (10) och (11) uppfylles med likhetstecken överallt inte något nödvändigt villkor för optimala lösningar. Optimala lösningar implicerar inte jämvikt i denna »stränga» mening, men de implicerar ett läge som kan betecknas som en modifierad form av jämvikt. Modifikationerna är tre. Två av dem gäller varor respektive primärfaktorer för vilka vid jämvikt utbudet är större än efterfrågan och vilka då har priset noll. Den tredje modifikationen gäller produktionsprocesser för vilka vid jämvikt intäkter är mindre än kostnader och vilka då ej användes.

Man kan då fråga sig om en sådan tolkning av optimeringsprogrammen i jämviktsteoretiska termer är rimlig. Vad som intresserar i detta sammanhang är huruvida de av tolkningen föranledda ändringarna är förenliga med den teori som formuleras i jämviktssystemet. Vid diskussionen härav utgår vi ifrån att den väsentliga egenskapen hos ett jämviktsläge är att det inte rymmer några tendenser till förändring.

Det är här lämpligt att börja med program II, eftersom motsvarande jämviktssituation tycks ha diskuterats mera ingående i litteraturen. I detta program hämtades sidovillkoren (10 a) från jämviktssystemet. De är system (10) med likheterna ändrade till olikheter. Diskussionen av programmet och dess duala program visade att vid varje optimal lösning är priset på en primärfaktor noll om den ej utnyttjats fullständigt. I jämviktssystemets termer innebär detta att efterfrågan är mindre än utbudet. Om antalet processer är mindre än antalet primärfaktorer, så är det sannolikt att utbud inte är lika med efterfrågan på varje faktor. Men även om man förutsätter att antalet processer är minst lika stort som antalet faktorer, så är det inte säkert att likhet kan råda överallt. Inom jämviktssystemet skall nämligen variablerna λ_j tillfredsställa inte bara (10) utan även (11), dvs. de rådande aktivitetsnivåerna skall ge jämvikt inte bara på faktorsmarknaden utan även på varumarknaden, och det är inte säkert att det finns aktivitetsnivåer som uppfyller båda dessa villkor samtidigt. Om nu i ett visst läge utbudet är mindre än efterfrågan för någon primärfaktor, så kommer priset på den att stiga med större utbud och mindre efterfrågan som följd. Det finns ingen principiell gräns för en sådan prisstegring, och därför kan alltid utbudet pressas upp och efterfrågan pressas ned tills de blir lika. Vid jämvikt kan således utbudet ej vara mindre än efterfrågan. Om å andra sidan utbudet är större än efterfrågan, så kommer priset att sjunka, varvid utbudet minskar och efterfrågan ökar. Men om man, som rimligt är, inte tillåter negativa priser, så finns det en gräns för prissänkningen, och man kan därför uppnå ett läge där utbudet är större än efterfrågan för någon faktor och där några tendenser till förändring ej förekommer. Ifrågavarande faktor är inte knapp och har priset noll. Det går inte att undvika en sådan situation genom att från början endast medtaga knappa faktorer i systemet, eftersom frågan om en faktor är knapp eller ej endast kan avgöras inom systemet.[1]

Motsvarande synpunkter kan anföras beträffande program I. Där utgöres sidovillkoren (11 a) av system (11) i jämviktssystemet med likheterna ändrade till olikheter. Vid optimal lösning för programmet och dess duala program är priset på en vara noll om produktionen av den är större än efterfrågan. För jämviktssystemet gäller att om efterfrågan är större än utbudet så stiger priset, och prisstegringen fortsätter tills efterfrågan och utbud är lika. Efterfrågan kan alltså vid jämvikt inte vara större än utbud. Om å andra sidan efterfrågan är mindre än utbudet, så sjunker priset med stigande efterfrågan och sjunkande utbud som resultat. Sättes den nedre prisgränsen vid noll, kan emellertid ett läge uppstå där utbud är större än efterfrågan utan att läget rymmer

[1] Jfr Dorfman, Samuelson and Solow a. a. sid. 358 o. ff. Dessa förhållanden påpekades tidigt av Zeuthen. Se Frederik Zeuthen, Den økonomiske Fordeling, Kjøbenhavn 1928, sid. 23–24. Jfr också artiklar under trettiotalet av von Stackelberg, Wald, Neisser o. a.

någon tendens till förändring. Den omständigheten att det här gäller varor som produceras inom systemet, medan det i program II gällde primärfaktorer vilka till sin totala tillgång är givna, förändrar inte situationen. Man kan nämligen inte utesluta möjligheten att två eller flera varor är tekniskt så sammankopplade i produktionen att det inte är möjligt att framställa en av dem utan att också framställa de övriga, oavsett om det finns efterfrågan på dem eller ej.

Den tredje modifikationen avser produktionsprocesserna och kom in via de duala programmen. Sidovillkoren i dessa säger att intäkter ej kan vara större än kostnader för varje process men väl mindre. För ett optimalläge gäller vidare att intäkter är lika med kostnader för varje använd process. Om således för någon process intäkter är mindre än kostnader, så användes den inte i ett optimalläge. Detta jämföres med vad som följer av antagandet om fri konkurrens. Där gäller ju att företag som går med förlust lämnar marknaden, och att produktionsverksamhet som lämnar vinst drar till sig nya företag, varigenom nya konstellationer mellan utbud, efterfrågan och pris uppstår. I ett jämviktsläge kan det därför inte existera någon produktionsprocess som går med vinst. Om någon sådan funnes skulle nämligen den företagare som disponerar över den genast inträda på marknaden och störa läget. Däremot kan det naturligtvis existera produktionsprocesser som går med förlust, blott att de vid jämvikt har trängts ut från marknaden och alltså inte utnyttjas. Vilka processer detta gäller kan i allmänhet inte avgöras på förhand utan framkommer som resultat av lösningen av systemet. Det är med andra ord spelet på marknaderna som avgör vilka faktorer och varor som är knappa och vilka processer som användes. Man kan därför säga att samtliga tre modifikationer i det »stränga» jämviktsbegreppet kan ges motiveringar som är rimliga även utifrån jämviktsteoretiska synpunkter.[1]

Man lägger slutligen märke till att villkoret beträffande processerna kan ges samma innebörd för båda optimeringsprogrammen. Detta villkor uppträder i de duala programmen. Det karakteristiska för dem är att priser uppträder som variabler. Priserna på varor och primärfaktorer avgör i sin tur vilka processer som går med förlust och vilka som går jämnt upp. Eftersom det senare alternativet är det bästa som kan

[1] Jfr Koopmans a. a. sid. 86–88.

inträffa, garanterar begränsningen till processer för vilka intäkter är lika med kostnader att utnyttjandet av primärfaktorerna under rådande produktionsteknik så väl som möjligt anpassats till en inbördes värdering av varor och faktorer som återspeglas i priserna. Anpassningen är den bästa i den meningen, att den slutprodukt som framkommer inte kan framställas billigare och att de primärfaktorer som användes inte kan producera mer. Även detta illustrerar sambandet mellan jämviktsanalysen och optimeringsprogrammen. Att den särskilt tydligt framträder via de duala programmen kan ju inte överraska, när man tänker på prisernas roll inom dessa och inom jämviktsanalysen.

IV. Input-output

Ett specialfall av ovan behandlade aktivitetsanalys inträffar om system

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m &= y_1 \\
\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m &= y_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m &= y_n
\end{aligned}
\tag{7}
$$

har en entydig non-negativ lösning. I ekonomiska termer innebär detta att den produktionsapparat som (7) representerar är sådan att en given slutprodukt alltid kan framställas med en, men endast en, användning av processerna. Detta specialfall får sitt särskilda intresse genom att det förekommer inom input-output-analysen och i denna fått en utbredd användning inom tillämpad ekonomisk analys. Den vanliga konstruktionen av en input-output-modell på grundval av en empirisk input-output-tabell kan uppfattas som en empirisk uppskattning av parametrarna i en produktionsmodell av tidigare diskuterad typ. Denna produktionsmodell kan, liksom i det generella fallet, ingå som ett element i ett jämviktssystem eller i optimeringsprogram.

Vi övergår nu till att diskutera input-output-analys för att närmare se i vilken relation denna står till de tidigare behandlade formerna av ekonomisk analys. Därvid utgår vi från att input-output-modellen konstrueras på grundval av en input-output-tabell, och vi begränsar diskussionen till att gälla en öppen modell.

Vi antar att det inom den studerade samhällsekonomin finns n st. sektorer inom vilka produktionen av n st. varor sker, en vara inom varje sektor. Dessa n sektorer betecknar vi som ett produktionssystem. Vi antar vidare att det finns l st. produktionsfaktorer som inte produceras inom systemet och som kallas primärfaktorer.

Under en viss tidsperiod registreras nu den mängd av varorna som använts inom sektorerna, den mängd som levererats från sektorerna ut från systemet, och den mängd av primärfaktorerna som använts inom sektorerna. På grundval härav uppställs en tabell av följande utseende

$$\begin{array}{ccccc}
\bar{x}_{11} \; \bar{x}_{12} \ldots & \bar{x}_{1n} & \bar{y}_1 & \bar{X}_1 \\
\bar{x}_{21} \; \bar{x}_{22} \ldots & \bar{x}_{2n} & \bar{y}_2 & \bar{X}_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{x}_{n1} \; \bar{x}_{n2} \ldots & \bar{x}_{nn} & \bar{y}_n & \bar{X}_n \\
\\
\bar{z}_{11} \; \bar{z}_{12} \ldots & \bar{z}_{1n} & — & \bar{z}_1 \\
\bar{z}_{21} \; \bar{z}_{22} \ldots & \bar{z}_{2n} & — & \bar{z}_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{z}_{l1} \; \bar{z}_{l2} \ldots & \bar{z}_{ln} & — & \bar{z}_l
\end{array}$$

Strecken anger att det är fråga om observerade värden. En rad anger output och en kolumn input för motsvarande sektor. Tabellen konstrueras så att följande relationer gäller

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + y_i = X_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad (28)$$

$$z_{k1} + z_{k2} + \cdots + z_{kn} = z_k \qquad k = 1, 2, \ldots l \qquad (29)$$

På grundval härav konstrueras en produktionsmodell med samma egenskaper som i tidigare behandlade fall. En av dessa är proportionalitet mellan input och output. Vi kan därför sätta

$$x_{ij} = a_{ij} X_j \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \qquad (30)$$

$$z_{kj} = b_{kj} X_j \qquad k = 1, 2, \ldots l \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad (31)$$

där a_{ij} och b_{kj} är konstanter som erhålles ur ovanstående tabell enligt

$$a_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij}}{\bar{X}_j} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \qquad (32)$$

$$b_{kj} = \frac{\bar{z}_{kj}}{\bar{X}_j} \qquad k = 1, 2, \ldots l \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad (33)$$

System (28) och (29) kan därmed skrivas på följande sätt[1]

[1] Se t. ex. Wassily W. Leontief, The Structure of American Economy, 1919–1939, New York 1951.

$$\begin{array}{l} (1-a_{11})X_1 \quad -a_{12}X_2-\cdots\cdots\cdots-a_{1n}X_n=y_1 \\ -a_{21}X_1+(1-a_{22})X_2-\cdots\cdots\cdots-a_{2n}X_n=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}X_1 \quad -a_{n2}X_2-\cdots+(1-a_{nn})X_n=y_n \end{array} \tag{34}$$

$$\begin{array}{l} b_{11}X_1+b_{12}X_2+\cdots+b_{1n}X_n=z_1 \\ b_{21}X_1+b_{22}X_2+\cdots+b_{2n}X_n=z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}X_1+b_{l2}X_2+\cdots+b_{ln}X_n=z_l \end{array} \tag{35}$$

Dessa båda system är fullständigt analoga med (7) och (8). Vi kan här uppfatta sektorerna som produktionsprocesser. Hela produktionssystemet kan representeras med n st. vektorer av följande utseende

$$A^{(j)}=\begin{bmatrix} \delta_{1j}-a_{1j} \\ \delta_{2j}-a_{2j} \\ \cdots \\ \delta_{nj}-a_{nj} \\ -b_{1j} \\ -b_{2j} \\ \cdots \\ -b_{lj} \end{bmatrix} \qquad j=1,2,\ldots n \tag{36}$$

där $\delta_{ij}=1$ för $i=j$, eljest 0. Denna vektor $A^{(j)}$ är en direkt motsvarighet till vektorn $A^{(j)}$ i (6).

På grund av proportionalitetsantagandet kan resultatet av en given aktivitetsnivå för sektorn uttryckas genom multiplikation av vektorn $A^{(j)}$ med en lämplig non-negativ faktor. Koefficienterna a_{ij} och b_{kj} har erhållits genom division av talen i kolumn j inom input-output-tabellen med totalprodukten inom sektor j. Elementen i vektorn $A^{(j)}$ anger därför nettooutput respektive nettoinput av varor och faktorer inom sektorn vid total tillverkning av 1 enhet av sektorns vara. Om man därför väljer vektorerna $A^{(j)}$ som enhetsnivåer för de processer som sektorerna utgör, så kan olika aktivitetsnivåer uttryckas med X_j, totalprodukten inom sektorerna, som då motsvarar λ_j i den tidigare modellen.

Då processerna liksom tidigare antas vara additiva kan en viss användning av hela systemet uttryckas genom multiplikation av varje vektor $A^{(j)}$ med ett värde X_j och efterföljande addering, såsom sker i system (34) och (35). Som resultat framkommer mängden framställda slutprodukter och mängden använda primärfaktorer. Med dessa antaganden kan alltså system (34) och (35) användas som uttryck för relationen mellan slutprodukter, aktivitetsnivåer och primärfaktorer. De bildar en produktionsmodell liksom tidigare system (7) och (8). Och liksom dessa kan de ingå som element antingen i jämviktssystem eller i optimeringsprogram.

Gentemot den tidigare produktionsmodellen uppvisar denna modell den skillnaden att antalet varor och processer är lika och att varje process tillverkar endast en vara. En given vara kan då tillverkas på endast ett sätt, och samma gäller för en samling varor. Om det därför gäller att tillverka en given slutprodukt, blir problemet endast huruvida den överhuvudtaget kan tillverkas inom systemet, medan något val mellan olika produktionssätt inte kommer ifråga. Formellt uttryckes produktionsproblemet i denna modell som ett problem att lösa ett system av lineära ekvationer. Om en lösning till system (34) existerar, så kan X_j uttryckas i y_i, och man får direkt uppgift om vilken aktivitetsnivå (totalprodukt) inom processerna (sektorerna) som motsvarar en given slutprodukt. Vi antar nu att det existerar en lösning till (34) som för nonnegativa värden på y_i ger entydiga non-negativa värden på X_j[1] och uttrycker lösningen på följande sätt

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n \\ X_2 &= A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n \end{aligned} \tag{37}$$

Vi skall nu med hjälp av denna produktionsmodell formulera optimeringsprogram motsvarande de två tidigare. På grund av (37) kan detta i båda fallen göras på två ekvivalenta sätt, antingen med X_i eller med y_i som variabel. Uttrycken (35) och (37) ger nämligen tillsammans en entydig relation mellan slutprodukt och primärfaktor. Man får för en given primärfaktor

$$\begin{aligned} z_k = \; & b_{k1} (A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n) \\ & + b_{k2} (A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + b_{kn} (A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n) \end{aligned} \tag{38}$$

[1] De matematiska egenskaperna hos system av denna typ har ingående diskuterats i litteraturen. Se t. ex. Y. K. Wong, Oskar Morgenstern, A Study of Linear Economic Systems, Weltwirtschaftliches Archiv, Heft 2, 1957.

eller

$$
\begin{aligned}
z_k = \; & (b_{k1} A_{11} + b_{k2} A_{21} + \cdots + b_{kn} A_{n1}) y_1 \\
& + (b_{k1} A_{12} + b_{k2} A_{22} + \cdots + b_{kn} A_{n2}) y_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (b_{k1} A_{1n} + b_{k2} A_{2n} + \cdots + b_{kn} A_{nn}) y_n
\end{aligned} \tag{39}
$$

Termerna $b_{kj} A_{ji}$ anger den mängd av en given primärfaktor k som användes inom sektor j för att framställa en enhet av vara i. Uttrycken inom parentes innebär att man summerar över samtliga sektorer och de blir då lika med den totala mängd av en given primärfaktor som användes för framställning av en enhet av en given vara, eller just vad som avsågs med produktionskoefficienterna c_{ki} i det ursprungliga Walras-systemet. Vi kan därför sätta

$$b_{k1} A_{1i} + b_{k2} A_{2i} + \cdots + b_{kn} A_{ni} = c_{ki} \tag{40}$$

Den totala mängd primärfaktorer som åtgår för en given slutprodukt kan då skrivas

$$
\begin{aligned}
z_1 &= c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \\
z_2 &= c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_l &= c_{l1} y_1 + c_{l2} y_2 + \cdots + c_{ln} y_n
\end{aligned} \tag{41}
$$

Eftersom de båda optimeringsprogrammen i sista hand avser relationer mellan slutprodukter och primärfaktorer är (41) ett lämpligt uttryck för att formulera dem.

I program I var problemet att framställa en given slutprodukt till minsta möjliga kostnad då faktorspriserna var givna. Vi formulerar först problemet med X_i som variabel

$$
\begin{aligned}
& (b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \cdots + b_{l1} v_l) X_1 \\
& + (b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \cdots + b_{l2} v_l) X_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (b_{1n} v_1 + b_{2n} v_2 + \cdots + b_{ln} v_l) X_n = \min
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
(1 - a_{11}) X_1 \quad & - a_{12} X_2 - \cdots\cdots\cdots - a_{1n} X_n \geq d_1 \\
- a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 & - \cdots\cdots\cdots - a_{2n} X_n \geq d_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
- a_{n1} X_1 \quad & - a_{n2} X_2 - \cdots + (1 - a_{nn}) X_n \geq d_n
\end{aligned} \tag{43}
$$

$$X_1, X_2, \cdots X_n \geq 0 \tag{44}$$

Denna formulering motsvarar fullständigt formuleringen av samma program på sidan 90. Enda skillnaden är att vissa termer här hämtats från input-output-modellen. Med utgångspunkt i detta program kan man nu bilda det duala programmet och fortsätta diskussionen på samma sätt som i det tidigare avsnittet. Man kommer då fram till samma resultat som formulerats på sidan 93.

Vi utnyttjar nu möjligheten att formulera samma program med y_i som variabel. Det får då följande utseende

$$\begin{aligned}&(c_{11}v_1+c_{21}v_2+\cdots+c_{l1}v_l)\,y_1\\&+(c_{12}v_1+c_{22}v_2+\cdots+c_{l2}v_l)\,y_2\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+(c_{1n}v_1+c_{2n}v_2+\cdots+c_{ln}v_l)\,y_n=\min\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}1\,y_1+0\,y_2+\cdots+0\,y_n&\geq d_1\\0\,y_1+1\,y_2+\cdots+0\,y_n&\geq d_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots&\\0\,y_1+0\,y_2+\cdots+1\,y_n&\geq d_n\end{aligned}\tag{46}$$

$$y_1,y_2,\cdots y_n\geq 0\tag{47}$$

Givna är fortfarande d_i och v_k.

Det duala programmet med p_i som ny variabel blir nu

$$d_1p_1+d_2p_2+\cdots+d_np_n=\max\tag{48}$$

$$\begin{aligned}1\,p_1+0\,p_2+\cdots+0\,p_n&\leq c_{11}v_1+c_{21}v_2+\cdots+c_{l1}v_l\\0\,p_1+1\,p_2+\cdots+0\,p_n&\leq c_{12}v_1+c_{22}v_2+\cdots+c_{l2}v_l\\\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\0\,p_1+0\,p_2+\cdots+1\,p_n&\leq c_{1n}v_1+c_{2n}v_2+\cdots+c_{ln}v_l\end{aligned}\tag{49}$$

$$p_1,p_2,\cdots p_n\geq 0\tag{50}$$

Givna är alltjämt d_i och v_k.

Här framgår klart i vilken ringa grad man i detta fall kan tala om ett optimeringsproblem. Av (46) framgår direkt att en viss efterfrågad produktmängd framställes till minsta möjliga kostnad då exakt de efterfrågade mängderna framställes. Eftersom de olika produktmängderna här kan varieras oberoende av varandra är detta alltid möjligt och därtill endast på ett sätt. Det duala programmet blir lika enkelt. Där kan p_i alltid väljas så, att priset på varje vara är lika med kostnaden för dess framställning. Eftersom varje vara framställes i endast en process och ingen process framställer mer än en vara, är detta ekvivalent med att intäkter är lika med kostnader för varje process. Detta garanterar, enligt vad som tidigare visats, att den slutprodukt som framkommer inte kan produceras billigare. Via optimeringsprogrammet kommer man alltså, såsom var att vänta, på nytt fram till vad som sades på sidan 105, nämligen att problemet att framställa en given slutprodukt i denna modell uttryckes som ett problem att lösa ett system av lineära ekvationer.

Sidovillkoren (49) motsvaras av system (4) i Walras-systemet. Skillnaden mellan dem är att ekvationerna ändrats till olikheter. Däremot har sidovillkoren (46) ingen explicit motsvarighet i Walras-systemet. Där förutsättes emellertid att efterfrågan och utbud är lika för varje vara, och detta kan uttryckas genom

$$\begin{aligned} y_1 &= d_1 \\ y_2 &= d_2 \\ &\cdots\cdot \\ y_n &= d_n \end{aligned} \tag{51}$$

Det har just framgått i vilken relation detta uttryck står till kostnadsminimum. System (4) och (51) garanterar tillsammans kostnadsminimum och varje kostnadsminimum är konsistent med två system (4) och (51) med lämpliga värden på parametrarna. I och med användningen av input-output-modellen har vi således kommit tillbaka till det ursprungliga systemet.

Vi övergår nu till program II för att se hur detta kan formuleras med hjälp av input-output-modellen. Problemet är där att med givna varupriser framställa största möjliga slutprodukt utan att överskrida givna resurser. Först uppställes programmet i en form som motsvarar den som utgjorde utgångspunkt för diskussionen av program II i föregående avsnitt.

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_n y_n = \max \tag{52}$$

$$\begin{array}{l} (1-a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \cdots\cdots - a_{1n}X_n = y_1 \\ -a_{21}X_1 + (1-a_{22})X_2 - \cdots\cdots - a_{2n}X_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \cdots - (1-a_{nn})X_n = y_n \end{array} \tag{34}$$

$$\begin{array}{l} b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \cdots + b_{1n}X_n \leq r_1 \\ b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \cdots + b_{2n}X_n \leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}X_1 + b_{l2}X_2 + \cdots + b_{ln}X_n \leq r^l \end{array} \tag{53}$$

$$X_1, X_2, \cdots X_n \geq 0 \tag{44}$$

$$y_1, y_2, \cdots y_n \geq 0 \tag{54}$$

Givna är p_i och r_k.

Detta motsvarar formuleringen på sidan 94. Diskussionen fördes där vidare genom att variabeln y_i utbyttes mot λ_j, vilket här skulle motsvaras av ett utbyte av y_i mot X_i med hjälp av (34). Diskussionen kan sedan fortsättas efter samma linjer som i det tidigare fallet, varvid man åter stöter på den svårighet som sammanhängde med att aktivitetsnivån i en given process i allmänhet inte kan varieras oberoende av aktivitetsnivåerna inom övriga processer. I detta fallet står en annan och bättre möjlighet öppen, nämligen att med hjälp av (37) uttrycka X_i i y_i och formulera programmet i variabeln y_i. Det får då följande utseende

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_n y_n = \max \tag{52}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \leq r_1 \\ c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n \leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{l1} y_1 + c_{l2} y_2 + \cdots + c_{ln} y_n \leq r_l \end{array}\right. \tag{55}$$

$$y_1, y_2, \cdots y_n \geq 0 \tag{54}$$

Givna är som tidigare p_i och r_k.

Det duala programmet får följande utseende

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_l v_l = \min \tag{56}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \cdots + c_{l1} v_l \geq p_1 \\ c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \cdots + c_{l2} v_l \geq p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \cdots + c_{ln} v_l \geq p_n \end{array}\right. \tag{57}$$

$$v_1, v_2, \cdots v_l \geq 0 \tag{58}$$

Alltjämt är p_i och r_k givna.

Det är lätt att som tidigare visa att likhetstecken i (55) för alla icke-fria faktorer och i (57) för alla använda processer (vilket här blir detsamma som alla framställda varor) är både tillräckligt och nödvändigt för optimala lösningar till programmen. Det är emellertid onödigt att gå igenom denna procedur på nytt, eftersom här föreligger ett specialfall av tidigare behandlade fall.

Jämför vi dessa program med Walras-systemet finner vi att (55) överensstämmer med (3) och (57) med (4) med endast de skillnaderna att ekvationerna i båda fallen ändrats till olikheter och att d_i i (3) ersatts med y_i. Den förra skillnaden är densamma som förekom vid den tidigare diskussionen av program II. Den senare skillnaden hänger samman med att vi här har räknat med utbud av varor, medan i Walras-systemet förutsattes att utbudet är lika med efterfrågan och efterfrågan d_i användes i system (3). Vid diskussionen av program I har just framgått hur detta förhåller sig till kostnadsminimum. Även för program II har vi alltså vid utnyttjandet av input-output-modellen kommit tillbaka till det ursprungliga systemet.

Än tydligare framgår relationen mellan input-output-modellen och Walras-systemet om man ställer upp villkoren för att det skall existera optimala lösningar till båda de på input-output-modellen grundade optimeringsprogrammen. Dessa villkor är enligt punkt 1 på sidan 90 att det finns värden på variablerna som satisfierar

$$\begin{aligned} y_1 &\geq d_1 \\ y_2 &\geq d_2 \\ &\cdots\cdot \\ y_n &\geq d_n \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \cdots + c_{l1} v_l &\geq p_1 \\ c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \cdots + c_{l2} v_l &\geq p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \cdots + c_{ln} v_l &\geq p_n \end{aligned} \tag{49, 57}$$

$$\begin{aligned} c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n &\leq r_1 \\ c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n &\leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ c_{l1} y_1 + c_{l2} y_2 + \cdots + c_{ln} y_n &\leq r_l \end{aligned} \tag{55}$$

$$y_1, y_2, \ldots y_n \geq 0 \tag{47}$$

$$p_1, p_2, \ldots p_n \geq 0 \tag{50}$$

$$v_1, v_2, \ldots v_l \geq 0 \tag{58}$$

Dessa villkor är tillräckliga och naturligtvis också nödvändiga. Nu gäller att för varje optimal lösning till program I kan (46) och (49) uppfyllas med likhetstecken (förutsatt att inget d_i är negativt). Eftersom således existensen av variabelvärden som uppfyller ovanstående villkor implicerar existensen av optimala lösningar till båda programmen, och varje optimal lösning till program I kan uppnås med likhetstecken överallt i (46) och (49), kan de nödvändiga villkoren skärpas, så att tillräckliga och nödvändiga villkor för att det skall existera optimala lösningar är att det finns non-negativa värden d_i, p_i och v_k som tillfredsställer följande villkor

$$\begin{aligned} c_{11} d_1 + c_{12} d_2 + \cdots + c_{1n} d_n &\leq r_1 \\ c_{21} d_1 + c_{22} d_2 + \cdots + c_{2n} d_n &\leq r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{l1} d_1 + c_{l2} d_2 + \cdots + c_{ln} d_n &\leq r_l \end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \cdots + c_{l1} v_l &= p_1 \\ c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \cdots + c_{l2} v_l &= p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \cdots + c_{ln} v_l &= p_n \end{aligned} \tag{4}$$

Beträffande (3a) vet vi slutligen att det för optimalvärden för program II uppfylles med likhetstecken för alla icke-fria faktorer.

Lägges härtill system (1) och (2), som avser efterfrågan på varor respektive utbudet av primärfaktorer, framgår tydligt hur vi via input-output-modellen kommit tillbaka till det system från vilket vi startade med den enda skillnaden att (3) ändrats från ett system av likheter till ett system av olikheter (och non-negativa priser har stipulerats). Strikt jämvikt i systemet, dvs. likhetstecken överallt i (3a), implicerar enligt det föregående optimalvärden för båda programmen, och likhetstecken i (3a) för alla icke-fria faktorer är både ett tillräckligt och nödvändigt villkor för optimala lösningar.

V. Sammanfattning

Utgångspunkten var ett walrasianskt jämviktssystem, vari bl. a. ingick en samling produktionskoefficienter c_{ki} angivande relationen mellan produktion av en given vara och användning av var och en av de tillgängliga primärfaktorerna. Dessa produktionskoefficienter uppfattades som givna i systemet och avsåg både sådan användning som sker direkt och sådan som sker indirekt via inom systemet producerade produktionsinsatser. Beträffande dessa produktionskoefficienter framhölls två problem. Det ena gällde produktionsinsatser som produceras inom systemet, det andra hur koefficienterna bestämmes om de ej uppfattas som givna.

För att närmare belysa dessa problem konstruerades ett generellare jämviktssystem, där som nytt element ingick en samling produktionsprocesser. För varje process angavs produktion och användning av varje särskild vara och faktor vid en vald produktionsnivå. Genom att specificera input och output för tillgängliga produktionsprocesser tas hänsyn till problemet om producerade produktionsinsatser. Samtidigt erhölls specifika uttryck för jämvikt på både varumarknaden och faktorsmarknaden. Genom att tillåta att en given vara framställs i mer än en process uppstår möjligheten till val mellan olika framställningssätt, och systemet ger därför i allmänhet ingen konstant relation mellan slutprodukt och faktorsinsats. Varje produktionsprogram medför en valsituation.

Med utgångspunkt i detta generellare jämviktssystem uppställdes två lineära optimeringsprogram, varav det ena avsåg kostnadsminimering och det andra produktmaximering. Till vart och ett av dessa uppställdes det duala programmet. Härefter undersöktes vissa villkor för optimala lösningar i programmen och dessa villkor tolkades i jämviktssystemets termer. Det framgick att optimallägen och jämviktslägen är intimt förknippade med varandra.

I optimeringsprogrammen sker ett val av aktivitetsnivåer för tillgängliga produktionsprocesser. Aktivitetsnivåerna bestämmer i sin tur å ena sidan den mängd slutprodukter som framställes, å andra sidan den mängd primärfaktorer som användes. Genom optimering, vare sig denna sker genom ett direkt programmeringsförfarande eller via marknaden, löses då det andra problemet som framhölls i samband med det ursprungliga jämviktssystemet, nämligen hur relationen mellan produktion av en given varumängd och användning av primärfaktorer bestämmes då produktionskoefficienterna c_{ki} inte uppfattas som givna i systemet. Det är därvid närmast minimering som blir aktuell. Detta ansluter sig till den anvisning för utvidgning av det ursprungliga jämviktssystemet som lämnas av Walras, blott att kostnadsminimeringen här relaterar till hela slutprodukten och ej lämnar något explicit uttryck för de enskilda produktionskoefficienterna.

Utifrån en input-output-tabell konstruerades till sist en input-output-modell. Denna uppfattades som en produktionsmodell där antalet processer är lika med antalet varor och där varje process tillverkar endast en vara. Liksom den tidigare generellare modellen tar input-output-modellen explicit hänsyn till produktionsinsatser som är framställda inom systemet, och likaså gäller för den att produktionskoefficienterna c_{ki} ej är givna. Bestämningen av utnyttjade mängder av primärfaktorerna kan dock ske på ett annat sätt än i det generella fallet. Där bestämdes de genom ett optimeringsförfarande. I input-output-modellen finns inga valmöjligheter när det gäller att framställa en given mängd slutprodukter och därför inte heller något minimeringsproblem. På grund härav kan produktionskoefficienterna c_{ki} härledas ur modellen genom lösning av ett system av ekvationer, och när dessa koefficienter är funna ger de tillsammans med faktorspriserna direkt kostnaden för framställning av en given slutprodukt. Däremot kvarstår det andra optimeringsproblemet, att med givna resurser framställa största möjliga slutprodukt.

Man kan därför säga att input-output-modellen vad beträffar behandlingen av produktionskoefficienterna, och därmed produktionssystemet, utgör ett mellansteg mellan det ursprungliga walrasianska systemet och det här konstruerade generellare systemet. I det ursprungliga systemet är koefficienterna c_{ki} givna, något kostnadsminimeringsproblem finns ej, och problemet med producerade produktionsinsatser antas vara löst. I input-output-modellen är koefficienterna c_{ki} ej givna, men varje vara tillverkas endast i en process och något minimeringsproblem finns därför ej. Koefficienterna c_{ki} kan då härledas ur ett system av ekvationer, vilket samtidigt löser problemet med producerade produktionsinsatser. I det generella systemet är koefficienterna c_{ki} ej givna. Tillverkningen av en given vara är ej begränsad till en enda process, varför en valsituation uppstår vid varje produktionsprogram. Detta val göres genom en minimering av kostnaderna. Samtidigt löser denna procedur problemet med producerade produktionsinsatser, men något explicit uttryck för koefficienterna c_{ki} erhålles ej. I samtliga tre fall föreligger ett maximeringsproblem.