OM AGGREGATION AV PRODUKTIONS-FUNKTIONER

Av Ragnar Bentzel

I. Aggregationsproblematiken

När man inom makroekonomisk analys använder begreppet produktionsfunktion, brukar man samtidigt anlägga ett betraktelsesätt, som innebär en överföring av den mikroekonomiska produktionsteoriens satser till det makroekonomiska planet. De inom produktionsteorien förekommande satserna, vilka härletts från premissen, att den enskilde företagaren försöker att maximera sin vinst, brukar således antas ha fullt analoga makroekonomiska motsvarigheter. Detta trots att man naturligtvis inte föreställer sig något subjekt, som försöker att handla enligt vinstmaximeringsprincipen på det makroekonomiska planet. Ett vanligt exempel på en dylik överföring av mikroteoriens satser är den ofta gjorda premissen, att vid fri konkurrens likhet mellan arbetets marginella produktivitet i samhället som helhet och reallön är ett villkor för jämvikt på arbetsmarknaden. Denna premiss innebär ju en direkt överföring av produktionsteoriens sats, att likhet mellan en produktionsfaktors pris och värdet av dess marginella produktivitet vid fri konkurrens implicerar jämvikt i den meningen, att företagaren, i lägen då denna likhet gäller, inte har anledning att förändra den i företaget insatta kvantiteten av ifrågavarande produktionsfaktor.

Det är inte enbart på produktionsteoriens område, som en överföring av nu nämnt slag är vanlig. På flera av nationalekonomiens områden har detta förfarande kommit att bli accepterad praxis. Mera som regel än som undantag är de makroekonomiska teorierna bildade som *analogier* till motsvarande mikroteorier. Detta är i och för sig fullt naturligt. Man kan inte — annat än möjligen i undantagsfall — konstruera makroteori utan att utgå från mikrosambanden, och det ligger då naturligtvis nära till hands att makroteorien bildas just genom en överföring av mikroteoriens samband till makroplanet. Men, är ett sådant överföringsförfarande verkligen tillåtet? Denna fråga har egendomligt nog aldrig blivit fullständigt besvarad. Analogibildningsförfarandet vilar i själva verket huvudsakligen på *intuitiv* grund. Logiskt sett hänger det ganska mycket i luften. Även om man har visat, att det i vissa *speciella* fall är möjligt att tillämpa, har man dock också visat, att det i andra fall *inte* är adekvat. Hela detta problemkomplex, som vanligen går under namnet aggregationsproblemet, brukar man förbigå med tystnad vid makroekonomisk analys. Alla är visserligen medvetna om att det existerar och att det inte är löst, men oftast använder man den strutstaktiken att helt enkelt inte låtsas se det.

Vad gäller då, mera konkret, detta aggregationsproblem? Ja, någon precis formulering av svaret på denna fråga är inte lätt att ge, men man kan säga, att det i främsta rummet gäller frågan, om man inom ekonomisk teori har rätt att laborera med *aggregat* av variabler och samband på samma sätt som med motsvarande *individuella* företeelser. Aggregationsproblematiken inkluderar således hela det stora problemkomplex, som uppkommer vid användandet och vid konstruktionen av pris- och kvantitetsindex. Det är därvid tydligen inte fråga om endast själva *övergången* från mikro till makro i vanlig mening utan problemen uppkommer även i den rena mikroteorien; man kan ju t. ex. fråga sig, om man har rätt att vid analysen av ett *enstaka* företags beteende sammanföra två eller flera typer av produktionsfaktorer till en grupp och applicera produktionsteoriens satser på denna grupp. Det är emellertid samtidigt klart, att aggregationsproblemen blir speciellt aktuella vid en *övergång* från mikro till makro. Och det är då frågan uppkommer, om man har rätt att konstruera makroteori genom analogibildning av motsvarande mikroteori. Mera precist kan man därvid formulera problemet på ettdera av följande tre sätt:[1]

Man kan för det *första* fråga sig, om man vid en *given* mikroekonomisk teori och vid *givna* definitioner på makrovariablerna har logisk motivering

[1] Denna tredelning är hämtad från H. Theil, *Linear Aggregation of Economic Relations.* Amsterdam 1954, sid. 5.

för att konstruera en makroekonomisk teori genom analogibildning.[1] Säg, för att välja ett enkelt exempel, att man har en mikroekonomisk teori enligt vilken de individuella prisrörelserna bestäms av efterfrågeöverskottets storlek enligt formeln $dp_i/p_i = A_i(E_i - U_i)dt/U_i$, där A_i betecknar konstanter, E_i efterfrågan på den i:te varan, U_i utbudet av den i:te varan samt p_i priset på denna vara. Säg vidare, att E_i och U_i är mätta i pengar samt att man har definierat makroekonomiska storheter $E = \Sigma E_i$, $U = \Sigma U_i$ samt en prisnivå $P = \Sigma c_i p_i$, där c_i är konstanter. Har man då rätt att skriva $dP/P = A(E - U)dt/U$? Det är uppbarligen denna typ av problem man möter vid *användningen* av givna pris- och kvantitetsindex.

Man kan för det *andra* ställa följande fråga: Säg, att man har en mikroekonomisk teori och att man genom *analogibildning* uppställer motsvarande makroekonomiska teori, varvid dock definitionerna av de makroekonomiska storheterna till en början lämnas öppna. Så länge detta senare är fallet kan makroteorien givetvis inte stå i motsatsställning till mikroteorien. Kan man då i efterhand finna rimliga definitioner på makrobegreppen, så att den uppställda makroteorien är konsistent med — dvs inte står i motsats till — den mikroteori, varifrån man utgått? Antag som ett exempel, att man utgår från nyss angivna mikroekonomiska teori $dp_i/p_i = A_i(E_i - U_i)dt/U_i$ och vidare att man bildar en makroekonomisk analogi härtill genom likheten $dP/P = A(E-U)dt/U$. Kan man då definiera dessa makrovariabler E, U och P så att för det första denna sista ekvation logiskt följer av mikroteorien och för det andra dessa variabler verkligen kan tolkas som uttryck för efterfrågan, utbud resp. prisnivå på makroplanet?[2] Det är denna typ av problem som uppstår vid *konstruktionen* av index.

I den mån som ovanstående två frågor inte kan besvaras med ett kategoriskt ja kan man för det *tredje* ställa den frågan, om det finns några speciella villkor under vilka dessa frågor kan besvaras jakande och vilka dessa i så fall är.

Den fråga, som ligger i den förstnämnda av nu nämnda problemtyper måste som regel besvaras nekande. Analogien mellan mikro- och makroteorierna håller inte streck för annat än speciella definitioner på makrostor-

[1] Denna typ av problem brukar man ibland karakterisera som problemet att vid given mikroteori och givna makrodefinitioner härleda de samband som råder mellan makrovariablerna. Se t. ex. H. Theil, a. a. s. 5. Denna karakterisering förefaller emellertid inte vara särskilt lyckad. Att finna sambanden mellan makrostorheterna, när dessas definitioner samt mikroteorien är given, är ju ett rent matematiskt problem, som endast i undantagsfall är av ekonomiskt intresse. Av en undersökning av de arbeten, som t. ex. Theil anser behandla denna typ av problem, framgår, att det hela tiden är *analogien* mellan mikro och makro, som är problemets kärnpunkt.

[2] Detta problem ställdes i B. Hansen, *A Study in the Theory of Inflation*, Uppsala 1951, s. 221—228. Det måste vidare varit just denna problemställning Myrdal haft i tankarna, då han förordade en prisindex, där reaktionshastigheterna ingår som vikter. Se G. Myrdal, *Monetary Equilibrium*. London 1939, s. 133 ff.

heterna. Detta förhållande är välkänt och problemet kan alltså sägas vara löst med negativt resultat. De senare av de ovannämnda problemtyperna är däremot mindre triviala. Det är också på detta sätt, som aggregationsproblemet vanligen ställts och det är denna typ av problem, som skall behandlas i det följande.

Det torde inte kunna förnekas, att aggregationsproblemet — ställt såsom vi nu sist angivit — är av primär betydelse för hela den makroekonomiska analysmetoden. Bortsett från vissa speciella undantag bygger ju denna på analogier från mikroteorien. Denna analogibildning, som inte innebär annat än en speciell teknik för att uppställa makroekonomisk teori, kan strängt taget inte försvaras, så länge som aggregationsproblemet inte är löst.[1]

Avsikten med föreliggande uppsats är att lämna ett bidrag till förståelsen av den speciella aggregationsproblematik, som är förbunden med överföringen av den mikroekonomiska *produktions*teoriens satser till det makroekonomiska planet. Först skall en översikt ges över de viktigaste punkterna i den diskussion, som förts angående detta ämne. Därefter skall problematiken närmare analyseras genom att särskilja olika typer av aggregation och undersöka dessa olika typer var och en för sig. Ett sådant särskiljande har synts motiverat, därför att det ger möjlighet att visa just *vilka* steg det är som vållar komplikationer vid övergången från mikro till makro.

II. Den teoretiska diskussionen

Låt oss börja med att rekapitulera ett par från konsumtionsteorin välkända satser:

År 1936 visade Leontief, att ett aggregat av två eller flera varor, vilka används i givna proportioner, vid en jämviktsanalys kan behandlas som en enda vara.[2] Aggregatets kvantitet och pris måste därvid mätas genom index, vilka varierar proportionellt mot de enskilda varukvantiteterna resp. mot kvoten mellan utgiftssumma och kvantitetsindex. Tre år senare visade Hicks, att även aggregat av sådana varor, vars *priser* varierar proportionellt, har samma konsumtionsteoretiska egenskap.[3] I detta fall måste dock aggregatets

[1] Detta förhållande har i flera sammanhang påpekats av Akerman. Se t. ex. "Socialekonomisk analys", *Ekonomisk Tidskrift* 1937, s. 103—106. Det summeringsproblem, som Akerman där betraktar är emellertid ett vidare begrepp än aggregationsproblemet, såsom det här karakteriserats. Jämför Akerman, "Genmäle till Ragnar Bentzel och Bent Hansen", *Ekonomisk Tidskrift* 1954, s. 53—65 samt B. H.:s "Slutreplik till Johan Akerman", *Ekonomisk Tidskrift* 1954, s. 139—147.

[2] W. Leontief, "Composite Commodities and the Problem of Index Numbers", *Econometrica* 1936, s. 39—59.

[3] J. R. Hicks, *Value and Capital*, Oxford 1939, s. 312—313. Ett liknande bevis förekommer i O. Lange, *Price Flexibility and Employment*, Bloomington 1944, s. 103—106.

prisindex göras proportionell mot de enskilda varupriserna medan kvantitetsindexen får definieras som kvoten mellan utgiftssumma och prisindex.[1]

Aggregation på produktionsteoriens område behandlades år 1938 av *Dresch*.[2] Den viktigaste tankegången hos denne kan — i starkt förenklad form — framställas på följande sätt:

Antag, att det finns n stycken företag, som vart och ett framställer en enda vara och som har produktionsfunktionerna $q_i = f_i\ (x_i, y_i, \ldots)$, där $x_i, y_i, \ldots$ är produktionsfaktorsinsatser och $i = 1,2, \ldots n$. Varje företag förutsätts handla efter vinstmaximeringsprincipen och fri konkurrens tänks råda. Man erhåller då villkoren

$$p_i f'_{ix} = w_{ix},\ p_i f'_{iy} = w_{iy}, \ldots$$

där p_i är priset på den vara, som framställs i det i:te företaget och w_{ix}, $w_{iy}, \ldots$ är faktorpriserna för det i:te företaget.

Dresch bildar nu pris- och kvantitetsindex, P, Q, W_X, X, W_Y, Y, ... enligt formlerna

$$PdQ = \Sigma\, p_i\, dq_i,\ QdP = \Sigma\, q_i\, dp_i,\ XdW_X = \Sigma\, x_i\, dw_{ix},\ W_X\, dX = \Sigma\, w_{ix}\, dx_i, \ldots$$ [3].

Han erhåller då först ekvationen

$$PdQ = \Sigma\, p_i\, f'_{ix}\, dx_i + \Sigma\, p_i\, f'_{iy}\, dy_i + \ldots$$

Om dessa summor i högra ledet betecknas med $PQ'_X\, dX$, $PQ'_Y\, dY, \ldots$ erhålles $PdQ = PQ'_X\, dX + PQ'_Y\, dY + \ldots$ och då vidare jämviktsvillkoren gäller blir $PQ'_X\, dX = \Sigma\, p_i f'_{ix}\, dx_i = \Sigma\, w_{ix}\, dx_i = W_X\, dX$, $PQ'_Y\, dY = \Sigma\, p_i f'_{iy} dy_i = \Sigma\, w_{iy} dy_i = W_Y\, dY, \ldots$

och följaktligen

$$Q'_X = \frac{W_X}{P},\ Q'_Y = \frac{W_Y}{P}, \ \ldots$$

Härigenom erhålls sålunda makroekonomiska relationer, som är helt analoga med de mikroekonomiska jämviktsvillkoren $f'_{ix} = \frac{w_{ix}}{p_i}$ etc.

Poängen i Dreschs ansats är uppenbarligen den, att han får överensstämmelse mellan de »marginella produktiviteterna» Q'_X, $Q'_Y \ldots$ och motsvarande kvoter mellan faktorpris och prisnivå, W_X/P, $W_Y/P \ldots$ Det är emellertid viktigt att göra klart för sig, vad dessa marginella produktiviteter i

---

1 Som framhållits av Wold, *Demand Analysis*, Uppsala 1952 s. 329 är Hicks bevis inte fullständigt eftersom endast infinitesimala förändringar betraktas. Wold har emellertid ett eget bevis, som icke lider av denna svaghet. Äran av detta bevis tillskriver han W. Leontief, a. a. Det förefaller emellertid som om Wolds tolkning av Leontief därvidlag är överdrivet välvillig. L. har strängt taget inte dragit denna slutsats.

2 F. Dresch, "Index Numbers and the General Economic Equilibrium", *Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 44* (1938) s. 134—141.

3 Detta är tydligen s. k. Divisia-index. Se F. Divisia, *Economique rationelle*, Paris 1928, s. 268.

själva verket innebär. De är *inte* partiella derivator i en i tiden *entydig* funktion av faktorinsatserna X, Y etc., ty funktionen Q är beroende även av prisutvecklingen. Som framgår av definitionerna på de marginella produktiviteterna är deras innebörd i stället denna: Uttrycken $PQ'_X \, dX$, $PQ'_Y \, dY$ anger de ökningar av det totala produktvärdet PQ, som en »virtuell» ökning av faktorinsatserna med kvantiteterna dX, dY, ... ger upphov till vid *givna och oförändrade priser* på varor och produktionsfaktorer. Uttrycken Q'_X, Q'_Y, ... kan därför sägas ge en *ögonblicksbild* av de marginella produktiviteterna. De är visserligen *beroende* av *priser* på varor och produktionsfaktorer, men för varje *given* priskombination har de ett väldefinierat värde. Om man alltså tänker sig, att priserna varierar med tiden, medför detta att de marginella produktiviteterna förändras med tiden — detta även om faktorinsatserna X, Y, ... inte förändras — men i varje *tidsögonblick* har dessa produktiviteter bestämda värden.

Dreschs arbete togs sedermera upp till behandling av *Klein*.[1] Denne riktade en skarp kritik mot Dreschs ansats med motiveringen att den inte svarade mot den frågeställning, som är av relevans för den makroekonomiska analysen. Enligt Klein gäller problemet att finna en makroekonomisk produktionsfunktion, som till hela sin *karaktär* är analog med motsvarande mikrofunktion. Liksom de mikroekonomiska produktionsfunktionerna måste den makroekonomiska för det första vara en *entydig* funktion av faktorinsatserna och för det andra vara av rent *teknisk* karaktär. Funktionen får således inte vara beroende av priser eller andra rent ekonomiska variabler. Dessa villkor uppfyller emellertid inte Dreschs funktion Q. Denna är ju beroende av *hela det ekonomiska systemets utveckling*.[2] Dreschs partiella derivator kan därför inte ses som rena analogier till motsvarande mikrostorheter. Man kan därför inte heller använda funktionen Q såsom grundval för ett makroekonomiskt analysförfarande, som bygger på den mikroekonomiska produktionsteoriens satser.

Vidare menade Klein, att Dreschs ansats inte var tillfredsställande, därför att den var begränsad till att gälla jämviktssituationer. Han framhöll, att aggregationsproblemet var lika aktuellt för situationer, i vilka jämvikt *inte* råder.

Klein visar sedan, att problemet såsom han ställt det i det generella fallet är olösligt. Endast om speciella villkor beträffande de mikroekonomiska

[1] L. R. Klein, "Macroeconomics and the Theory of Rational Behaviour", *Econometrica* Vol. 14 (1946), s. 93—108, samt L. R. Klein, "Remarks on the Theory of Aggregation", *Econometrica* Vol. 14 (1946), s. 303—312.

[2] Det är välkänt att Divisia-indexen är beroende inte endast av situationen i en given tidpunkt utan av hela det tidigare utvecklingsförloppet.

produktionsfunktionerna är uppfyllda, kan man finna aggregerade produktionsfunktioner, som uppfyller hans krav. Han försöker då finna vilka typer av mikrofunktioner, som det därvid är frågan om, och visar hur aggregationsproblemet kan behandlas, när mikrofunktionerna uppfyller dessa speciella villkor.[1]

Den utgångspunkt, som Klein använt i sitt ovan nämnda resonemang, kritiserades i sin tur av *Pu.*[2] Denne menade, att Klein ställt målet alltför högt. Det var enligt Pu trivialt, att man inte kunde finna en aggregerad produktionsfunktion av den typ, som Klein hade i tankarna. Anledningen därtill var den, att man i alla lägen alltid kunde tänka sig en överföring av produktionsfaktorer från ett företag till ett annat med den konsekvensen att den totala produktionen stiger eller faller. Men genom en sådan *omfördelning* påverkas inte den aggregerade *kvantiteten* av faktorinsatserna. Därmed var det enligt Pu också bevisat att man aldrig kunde finna en entydig funktion av Kleins typ. Man måste i den aggregerade funktionen även införa variabler, som anger produktionsfaktorernas *fördelning* mellan företagen.

De av Dresch framförda tankegångarna togs sedan åter upp av *May.*[3] Denne betraktade ett av mikroekonomiska funktioner bestående jämviktssystem innehållande en *frihetsgrad,* dvs. ett system med n ekvationer och $n + 1$ obekanta variabler. Från detta mikrosystem härleder han sedan med användande av Divisia-index ett makrosystem och såsom *fri variabel* — dvs. med mer vanligt språkbruk såsom *parameter* — använder han där den aggregerade sysselsättningen. Han löser sedan ut samtliga makrovariabler såsom entydiga funktioner av denna parameter. Detta är ju alltid möjligt att göra, eftersom hela systemets utveckling helt hänger på parameterns förändringar. Vid lösningen av de makroekonomiska storheterna erhåller han givetvis även ett funktionssamband mellan aggregerad produktion och aggregerad sysselsättning. Han visar sedan att denna funktions derivata med avseende på sysselsättningen alltid blir lika med kvoten mellan aggregerad lön och aggregerad prisnivå. Därmed skulle således även i hans fall analogien mellan mikro och makro vara etablerad. Han framhåller emellertid, att detta samband mellan produktion och sysselsättning inte kan ses som en produktionsfunktion av den typ, som Klein fordrade. Mays funktion blir i själva verket beroende av *samtliga* i det fullstän-

---

[1] Detta problem behandlas vidare i A. Nataf, "Sur la possibilité de construction de certains macromodèles." *Econometrica,* Vol. 16 (1948), s. 232—244.

[2] S. S. Pu, "A Note on Macroeconomics", *Econometrica,* Vol. 14, (1946), s. 299—302.

[3] K. May, "The Aggregation Problem for a One-Industry Model", *Econometrica* Vol. 14 (1946), s. 285—298, samt K. May, "Technological Change and Aggregation", *Econometrica,* Vol. 15 (1947), 51—63.

diga mikrosystemet ingående funktionerna, inklusive varumarknadens efterfrågefunktioner.

Mays ansats är i själva verket mycket starkt besläktad med Dreschs. Den principiella skillnaden kan sägas ligga däri, att medan Dreschs »produktionsfunktion» Q är beroende av de för ögonblicket rådande prisförhållandena, så är dessa i Mays ansats ersatta med motsvarande uttryck betraktade som funktioner av den fria variabeln. Denna likhet gör, att Mays resultat närmast kan ses som ett korollarium till Dreschs.[1]

Man kan nu fråga sig, vem som har rätt och vem som har fel av de författare, vars bidrag vi nu behandlat. Något entydigt svar på denna fråga kan väl knappast ges: alla kan väl sägas ha haft rätt, om hänsyn tages till de utgångspunkter de haft. När det gäller frågan, vem som *ställt problemet* på mest fruktbart sätt råder emellertid ingen tvekan. Det är Klein. Den ekonomiska innebörden av problemet såsom han ställer det är fullt klar, han söker en produktionsfunktion, som skall kunna användas såsom en av byggstenarna i ett makrosystem av vanlig typ. Så är emellertid inte fallet med Dreschs och Mays ansatser. Där har man svårt att finna någon relevant bakomliggande ekonomisk frågeställning. Båda dessa synes ha angripit problemet enbart från den formella sidan utan att ha gjort fullt klart för sig, vartill deras resultat skall användas.

Kleins kritik av Dresch är utan tvivel motiverad. Om man skall kunna använda analogibildningsmetoden vid uppställandet av en makroteori, måste analogien vara fullständig och även omfatta *karaktären* hos de funktioner, som betraktas. Inom mikroteorien är produktionsfunktionens utseende ett givet *datum* och skall man kunna överföra de produktionsteoretiska satserna till det makroekonomiska planet måste även den makroekonomiska produktionsfunktionen vara ett *datum*. Såsom den definierats av Dresch är den emellertid inte detta. Dreschs funktion är ju, som vi tidigare nämnt beroende av prisförhållanden. Säg t. ex., att man vill betrakta den makroekonomiska lönen som parameter inom ett makroekonomiskt jämviktssystem och vill undersöka vilka konsekvenser för sysselsättningen som en lönehöjning leder till vid oförändrad prisnivå. Detta kan inte göras genom att definiera en makroekonomisk produktionsfuktion på det sätt, som Dresch gör. I så fall skulle man endast kunna säga, att arbetets marginella produktivitet ständigt vore lika stor som kvoten mellan penninglön och prisnivå, men man skulle inte bli klokare därav. Man kunde nämligen a priori inte säga, om sysselsättningen skulle öka eller minska genom löne-

[1] I den andra av sina nyssnämnda econometricaartiklar bemöter Klein May's ansats på ungefär samma sätt som Dresch's.

höjningen, eftersom den marginella produktiviteten i Dreschs funktion inte är *entydigt* bestämd av sysselsättningen.[1]

III. Olika typer av aggregation

I den nu relaterade diskussionen mellan Dresch, Klein, Pu och May har man ställt aggregationsproblemet på ett mycket generellt sätt. Man har utgått ifrån förekomsten av flera företag, som vart och ett har sitt speciella produktionssamband $q_i = f_i (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, där alla x_i och y_i betecknar insatser av olika produktionsfaktorer. Sedan har man sökt ett funktionssamband $Q = F(X, Y, \ldots)$, där Q är ett aggregat av alla q_i, X ett aggregat av alla x_i, Y ett aggregat av alla y_i etc samt F ett aggregat av alla f_i. Det är här tydligen fråga om en 3-dubbel aggregation, dels över *varor*, dels över *produktionsfaktorer*, dels över *företag.*

Klein har givetvis rätt, när han säger, att aggregationsproblemet är relevant inte endast för analysen av jämviktslägen utan även för den dynamiska analysen av tillstånd med bristande jämvikt. Att ställa problemet, som han gjort det innebär emellertid en betydande generalisering av den problemställning, som är begränsad till jämviktstillstånd och som övriga författare vanligen haft. Det innebär ju en fordran på att aggregationsvillkoren skall gälla inte endast för de värden på variablerna, som är förenliga med jämviktstillstånden, utan även för *andra* värden. Och att finna aggregat, som har denna egenskap, är ett betydligt mer komplicerat problem än om man begränsar aggregationsvillkoren till att gälla för jämviktslägen. Det är därför av vikt, att man håller isär den problematik, som uppstår vid jämviktsanalys, och den, som uppstår vid dynamisk analys.

I sina försök att finna aggregat, som passar båda dessa analystyper negligerar Klein ett i detta sammanhang väsentligt förhållande, nämligen att det produktionsfunktionsbegrepp, som används inom den rena produktionsteorien och för vilket dennas satser är tillämpliga, *inte* är identiskt med det begrepp, som vanligen används inom den dynamiska analysen. Inom produktionsteorien är — för att använda Johan Åkermans terminologi — produk-

[1] Det har ansetts ligga utanför ramen för den här givna framställningen att gå in på den aggregationsproblematik, som uppstår vid *värderingen* av olika produktionsresultat. Därmed sammanhängande frågor har ingående diskuterats i bl. a. J. R. Hicks, "The Valuation of the Social Income", *Econometrica* Vol. VII 1(940) s. 105—124, S. Kuznets, "On the Valuation of the Social Income — Reflections on Professor Hicks' Article", *Economica* Vol. XV (1948) s. 1—16, J. R. Hicks, "The Valuation of the Social Income — H. Comment on Professor Kuznets' Reflections" *Economica* Vol. XV (1948) s. 163—172, I. M. D. Little, "The Valuation of the Social Income". *Economica* Vol. XVI (1949), s. 11—26, P. A. Samuelson, "Evaluation of Real National Income" *Oxford Economic Papers,* 1950: 1, s. 1—29, samt I. Ohlsson, *On National Accounting* Stockholm 1953, kap. III.

tionsfunktionen en *kalkylmodell*. En produktionsfunktion $f(x, y, \ldots)$ anger definitionsmässigt den *maximala* produktmängd, som enligt företagsledningens uppfattning i en viss tidpunkt kan framställas vid alternativa insatser av variabla produktionsfaktorer under en viss tidsperiod. Vid jämviktsanalyser kan denna funktion även uppfattas som ett kausalsamband mellan framställd kvantitet och faktorinsatser. Vid en dynamisk analys är emellertid en sådan identifiering ingalunda självklar. Där måste man i själva verket skilja mellan kalkylmodellen och motsvarande kausalsamband. Den under en viss period verkligen framställda kvantiteten behöver ju inte ligga på kalkylmodellens »produktberg»; företagsledningens uppfattning om de kvantiteter, som kan framställas vid alternativa faktorinsatser, kan vara verklighetsfrämmande; produktionen kan av någon oförutsedd anledning ha kommit att bedrivas mindre effektivt än man tänkt sig etc. Vid en dynamisk analys har man därför i själva verket anledning att laborera med en produktionsfunktion av typen

$$q_t = f(x_t, y_t, \ldots) - z_t$$

där q_t är den framställda kvantiteten, f är kalkylmodellens produktionsfunktion, x_t, y_t etc faktorinsatser och z_t slutligen, just avvikelsen mellan den framställda kvantiteten och kalkylmodellens kvantitet vid motsvarande faktorinsatser. Naturligtvis kan man vid en analys göra den förutsättningen, att z_t alltid är lika med 0, dvs. att den framställda kvantiteten ständigt ligger på kalkylmodellens »produktberg». Det är då emellertid av vikt, att man är medveten om att man verkligen gjort ett speciellt antagande, och att man vid ett överförande av den mikroekonomiska teorien till det makroekonomiska planet alltså inte utan motsvarande antagande kan vänta sig att få överensstämmelse mellan ett aggregat av framställda kvantiteter och en aggregerad produktionsfunktion, som uppfyller kraven på att ha karaktären av en kalkylmodell.

De nu nämnda förhållandena — den 3-dubbla aggregeringen och dubbelheten i produktionsfunktionsbegreppet — är av väsentlig betydelse för förståelsen av den problematik, som ligger i övergången från mikro till makro. Aggregeringen av produktionsfaktorer och av varor, medför nämligen problem, som i och för sig inte har att göra med om man betraktar ett enstaka företag eller flera företag. Samtidigt innehåller övergången från analysen av ett enstaka företag till analysen av ett aggregat av företag vissa problem, som är av helt annan karaktär. I de fall, slutligen, då aggregationen gäller kalkylmodeller blir problematiken icke densamma, som den, vilken uppstår vid aggregering av kausalsambanden mellan framställd varukvantitet och insatser av produktionsfaktorer. I det följande skall de nu nämnda olika aggregationstyperna diskuteras mera i detalj. För att på enklast möjliga sätt kunna göra detta skall de olika typerna av aggregation behandlas separat. I de närmaste tre avsnitten skall därför i tur och ordning behandlas aggregation av produktionsfaktorer, aggregation av varor samt aggregation av företag. I dessa avsnitt skall endast de problem betraktas, som uppstår vid *jämvikts*-analyser. I därpå följande avsnitt skall de komplikationer diskuteras, som uppstår vid övergången från analyser av jämviktslägen till analyser av situationer med bristande jämvikt. För att förenkla framställningen skall genomgående den förutsättningen göras, att *fri konkurrens* är rådande.

IV. Aggregation av produktionsfaktorer vid jämviktsanalys

När det gäller aggregation av produktionsfaktorer för en statisk analys av ett enskilt företags beteende kan problemet ställas på följande sätt:

Ett företag, som framställer en enda vara, förutsättes ha en produktionsfunktion $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ där x_1, x_2, x_3 etc betecknar insatser av olika variabla produktionsfaktorer. För enkelhets skull kan vi här begränsa oss till att betrakta 3 stycken sådana produktionsfaktorer. Dessas priser betecknas med w_1, w_2 och w_3 och priset på den framställda produkten med p. Enligt den vanliga produktionsteorien blir företagets faktorefterfrågan, säg e_1, e_2, e_3, bestämd av jämviktsvillkoren

$$pf'_i\,(e_1, e_2, e_3) = w_i \qquad i = 1, 2, 3$$

där f'_i är produktionsfunktionens partiella derivata med avseende på den i:te produktionsfaktorn. Genom att lösa ut e_1, e_2 och e_3 från detta ekvationssystem erhålles uttrycken

$$e_i = f_i^{\dagger}(w_1/p, w_2/p, w_3/p) \qquad i = 1, 2, 3$$

där $f_i^{\dagger}$ är de till f'_i inversa funktionerna. Dessa förutsättes vara entydiga.

Eftersom f är en produktionsfunktion är den en *entydig* funktion av de ingående variablerna. Den måste vidare ha den egenskapen, att matricen $M = \| f''_{ij}\,(e_1, e_2, e_3) \|$ är negativt definit, vilket innebär att den kvadratiska formen $\Sigma\Sigma\, v_i\, v_j\, f''_{ij}\,(e_1, e_2, e_3) < 0$ $\qquad i = 1, 2, 3$
hur man än väljer variablerna v_i.

Frågan är nu: Kan man definiera två aggregat, säg e_0 och w_0, av faktorinsatserna e_1 och e_2 resp. av priserna w_1 och w_2, samt vidare en funktion $F(e_0, e_3)$ på ett sådant sätt, att följande villkor är uppfyllda:

$$\text{(A)}\quad F\,(e_0, e_3) = f\,(e_1, e_2, e_3)$$

$$\text{(B)}\quad F'_i\,(e_0, e_3) = w_i/p \text{ samt} \qquad i = 0, 3$$

$$\text{(C)}\quad \Sigma\Sigma\, V_i\, V_j\, F''_{ij}\,(e_0, e_3) < 0$$

där V_i är godtyckliga variabler.

Att den nu ställda frågan måste besvaras nekande är inte svårt att inse. Fordringen A innebär ju, att en funktion *i två* variabler, $F(e_0, e_3)$, skall vara lika med en funktion i *tre* variabler $f(e_1, e_2, e_3)$, och för att detta skall vara möjligt är det nödvändigt att kunna uttrycka de två variablerna e_1 och e_2 som entydiga funktioner av variablerna e_0 och e_3. Så länge som inga restriktioner lagts vare sig på priserna eller på produktionsfunktionens utseende finns det emellertid inga kombinationer e_1, e_2, e_3, som *inte* är förenliga med jämviktslägen och det innebär att det inte kan finnas något entydigt samband mellan e_1 och e_2 och inte heller mellan någon av dessa variabler och e_3. Hur vi än definierar aggregatet e_0, kan det då inte heller finnas två entydiga samband mellan e_1 och e_2 å ena sidan och e_0 och e_3 å den andra sidan.

Det går naturligtvis inte att komma ifrån nyssnämnda faktum genom att definiera aggregaten genom Divisia-index. En sådan definition ger $F'_0 \, de_0 = f'_1 de_1 + f'_2 de_2$ och $F'_3 de_3 = f'_3 de_3$, och man kan då lätt härleda likheterna $F'_0 = w_0/p$ och $F'_3 = w_3/p$. Men, som tidigare nämnts, dessa uttryck kan inte betraktas som partiella derivator till en entydig funktion $F(e_0, e_3)$. Om så vore fallet, skulle nämligen alla e_1- och e_2-värden, som uppfyller villkoret $w_1 \, e_1 + w_2 \, e_2 = w_0 \cdot k$, där k är en konstant, ligga på samma isokvant och det kan uppenbarligen inte vara generellt giltigt.

Att det i det ovan betraktade generella fallet inte finns något aggregat av produktionsfaktorer, så beskaffat, att produktionsteorins satser kan överföras till detta aggregat, hindrar naturligtvis inte att en sådan överföring är möjlig i vissa *specialfall*. Sådana specialfall kan konstrueras genom att lägga restriktioner *antingen* på den ursprungliga produktionsfunktionens utseende *eller* på produktionsfaktorernas prisers variationsområde. Den förra typen av villkor skall vi här inte gå in på — den har ju som ovan nämnts behandlats av Klein. Den senare typen av villkor skall vi emellertid undersöka något närmare.

På grund av den formella analogi, som råder mellan konsumtions- och produktionsteorierna, har man all anledning att vänta sig, att Hicks' sats om aggregation vid proportionella prisvariationer har sin fulla motsvarighet inom produktionsteorin. Det kan också lätt visas, att så är fallet. Beviset kan framställas på följande sätt:[1]

Antag, att faktorpriserna w_1 och w_2 varierar proportionellt, så att vi har $w_1 = a_1 w_0$ och $w_2 = a_2 w_0$, och bilda aggregatet $e_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Ur det ekvationssystem, som bildas av denna definition samt av jämviktsvillkoren

[1] Det bevis som här ges följer de linjer, som i kortfattad form ges i H. Wold, a. a. s. 110.

$f'_1 = w_1/p = a_1 w_0/p$ samt $f'_2 = w_2/p = a_2 w_0/p$ kan vi då lösa ut variablerna e_1 och e_2 och uttrycka dem som funktioner av endast e_0 och e_3. Vi kan då skriva

$$e_i = H_i (e_0, e_3) \qquad i = 1, 2$$

Dessa funktioner H måste vara *entydiga* inom hela det område där avtagande avkastning råder.[1]

Genom att i den ursprungliga produktionsfunktionen, f, insätta funktionerna H_1 och H_2 i stället för e_1 resp e_2 erhålles tydligen en funktion i endast två variabler, e_0 och e_3. Om vi kallar denna funktion för $F(e_0, e_3)$ är tydligen villkoret (A) ovan identiskt uppfyllt.

Genom att derivera funktionen F erhålles tydligen $F'_0 = f'_1 H'_{10} + f'_2 H'_{20}$ där F'_0, H'_{10} och H'_{20} betecknar de partiella derivatorna av F, H_1 och H_2 med avseende på e_0, samt vidare $F'_3 = f'_1\ H'_{13} + f'_2\ H'_{23} + f'_3$ där beteckningarna F'_3 H'_{13} och H'_{23} är analoga med F'_0, H'_{10} och H'_{20}. Då nu emellertid samtidigt e_0 definitionsmässigt är lika med $a_1\ e_1 + a_2\ e_2$ måste följande relationer gälla mellan H-funktionerna: $a_1 H'_{10} + a_2 H'_{20} = 1$ samt $a_1 H'_{13} + a_2 H'_{23} = 0$. Eftersom vidare, $f'_i = a_i w_0/p$ för $i = 1$ och 2 samt $f'_3 = w_3/p$, kan vi lätt härleda ekvationerna

$$F'_i (e_0, e_3) = w_i/p \qquad i = 0 \text{ och } 3$$

Detta innebär uppenbarligen, att funktionen F uppfyller villkoret (B) ovan.

Genom derivation av de nyss funna uttrycken för F'_i kan vi bilda de partiella derivatorna av andra ordningen. Efter reducering erhålles vid en sådan kalkyl uttrycken

$$F''_{00} = f''_{11} (H'_{10})^2 + 2 f''_{12} H'_{10} H'_{20} + f''_{22} (H'_{20})^2,\ F''_{30} = f''_{31} H'_{10} + f''_{32} H'_{20}$$

samt $F''_{33} = f''_{33}$. Om vi nu bildar den kvadratiska formen $\Sigma\Sigma\ v_i v_j\ F''_{ij}$ kan denna också skrivas såsom $\Sigma\Sigma\ z_i z_j f''_{ij}$, där i, j = 1, 2 och 3 samt $z_1 = v_0 H'_{10}, z_2 = v_0 H'_{20}$ och $z_3 = v_3$. Men, eftersom formen $\Sigma\Sigma\ z_i z_j f''_{ij}$ enligt de grundläggande förutsättningarna alltid måste vara negativ måste också $\Sigma\Sigma\ v_i v_j F''_{ij}$ vara detta. Följaktligen utgör F''_{ij} koefficienterna i en negativt kvadratisk form och därmed är också visat, att villkoret (C) ovan är uppfyllt.

Som sammanfattning av vad som sagts i detta avsnitt kan sägas följande: Vid en analys av ett enstaka företags beteende kan man i det generella fal-

---

1 Det ekvationssystem man har för att lösa e_1 och e_2 kan ju skrivas $f'_1 (e_1, e_2, e_3)/a_1 = f'_2 (e_1, e_2, e_3)/a_2$ samt $e_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Det är välkänt från konsumtionsteorien, att ett system av detta slag för varje givet e_3 ger *entydiga* lösningar till e_1 och e_2 såvida kurvskaran $f(e_1, e_2, e_3) = c$ är konvex mot origo. Se H. Wold a. a. s. 87. Att detta villkor är uppfyllt i fallet ovan är tydligt. Matricen $\| f''_{ij} \|$ för i, j = 1, 2. 3 är ju negativt definit överallt där avtagande avkastning råder och då måste matricen $\| f''_{ij} \|$ för i, j = 1, 2 vara det. Och är denna matrix negativt definit måste den ovannämnda kurvskaran vara konvex mot origo. Se N. Georgescu—Roegen, "A Diagrammatic Analysis of Complementarity", *The Southern Economic Journal*, Vol. XIX: 1 (1952), s. 1—20.

let icke sammanföra två eller flera produktionsfaktorer till en grupp och applicera produktionsteoriens satser på denna grupp. En sådan sammanslagning är emellertid möjlig att göra i de fall, då priserna på ifrågavarande produktionsfaktorer varierar proportionellt.

V. Aggregation över varor för en jämviktsanalys

När det gäller företag, som samtidigt framställer mer än en vara kan man vanligen inte laborera med en produktionsfunktion av den enkla typ som betraktats i föregående avsnitt. Sådana företags produktionsfunktion brukar i stället skrivas på formen $f(q_1 \ldots q_n, x_1, \ldots x_m) = 0$, där q_i betecknar varukvantiteter och x_i kvantiteter av produktionsfaktorer. Det är nu emellertid välkänt, att det förhållandet, att man här skriver produktionsfunktionen på ett något annorlunda sätt än på formen $q = f(x_1 \ldots)$, inte medför några större komplikationer för den formella analysen. De satser som kan härledas med utgångspunkt från sistnämnda funktion har fullt analoga motsvarigheter — även på det formella planet — vid betraktandet av den mer generella funktionstypen.

För att beskriva den problematik, som uppstår vid aggregation över varor i en produktionsfunktion kan vi begränsa oss till att betrakta ett företag, som framställer 3 varor med hjälp av endast en produktionsfaktor. Vi kan då skriva detta företags produktionsfunktion på formen

$$x = f(q_1, q_2, q_3)$$

där f är en entydig funktion. Om nu de värden på varukvantiteter och faktorinsats, som svarar mot vinstmaximeringssituationen betecknas med r_1, r_2 och r_3 måste följande villkor vara uppfyllda

$$wf'_i(r_1, r_2, r_3) = p_i \qquad i = 1, 2, 3$$

och vidare måste matricen $\| f''_{ij}(r_1, r_2, r_3) \|$ vara positivt definit.

Frågan blir nu, om vi kan finna aggregat, säg r_0 och p_0, av r_1 och r_2 resp. av p_1 och p_2 samt en funktion F, som uppfyller villkoren

$$(A') \quad F(r_0, r_3) = f(r_1, r_2, r_3)$$

$$(B') \quad F'_i(r_0, r_3) = p_i/w \qquad i = 0 \text{ och } 3$$

$$(C') \quad \Sigma\Sigma\, v_i v_j F''_{ij}(r_0, r_3) > 0$$

Denna frågeställning är nu tydligen fullkomligt analog med den, som vi betraktade i föregående avsnitt. Vad som där sades kan därför omedelbart översättas till att gälla aggregation över varor. Vi kan då dra följande slutsats:

I ett företag, som framställer flera varor är en aggregering över varor icke generellt tillåten. I de fall, däremot, då priserna på två eller flera varor varierar proportionellt, kan dessa varor alltid aggregeras.

VI. Aggregering över företag vid jämviktsanalys

Medan de problemställningar, som behandlats i det föregående och i det näst föregående avsnittet varit fullt analoga, uppkommer vid aggregering över företag en problematik av annan karaktär. För att på enklast möjliga sätt beskriva denna kan vi begränsa oss till att betrakta ett antal olika företag, som alla framställer en och samma vara och därvid använder endast två variabla produktionsfaktorer. Genom denna begränsning vinnes, att produktionsfunktionerna kan skrivas på samma form som i näst föregående avsnitt samtidigt som någon aggregation över varor eller över produktionsfaktorer inte behöver komma med i bilden. Den totalt framställda kvantiteten, kan då rimligen inte definieras på annat sätt än såsom $\Sigma\, q_i$, där q_i är den kvantitet, som framställs inom det i:te företaget. Lika självklara blir definitionerna av faktorinsatserna. Om vi betecknar det i:te företagets insatser av de två produktionsfaktorerna med x_i och y_i blir definitionen på motsvarande totalkvantiteter $X = \Sigma x_i$ och $Y = \Sigma y_i$. Priserna, säg w_x och w_y, kommer inte med i dessa definitioner.

Antag, att företagens antal är lika med n och att det i:te företaget har produktionsfunktionen $f_i(x,y)$. Om vi då med x_i och y_i menar de faktorkvantiteter, som svarar mot jämviktslägena, måste villkoren $f'_{ix}(x_i, y_i) = w_x/p$ samt $f'_{iy}(x_i, y_i) = w_y/p$ vara uppfyllda för alla i.

Frågan gäller nu: Kan man finna en funktion, säg $F(X,Y)$ så beskaffad, att följande villkor är uppfyllda

(A''') $F(X, Y) = \Sigma\, f_i\,(x_i, y_i)$

(B''') $F'_i\,(X, Y) = w_i/p$ $\qquad$ $i = x$ och y

(C''') $\Sigma\,\Sigma\, V_i\, V_j\, F''_{ij}\,(X, Y) < 0$ $\qquad$ $i, j = x$ och y

Denna fråga kan besvaras *jakande*. Vi kan i själva verket alltid bilda den sökta funktionen $F(X,Y)$. Beviset härför kan utföras på följande sätt

Ur jämviktsvillkoren $f'_{ix} = w_x/p$ och $f'_{iy} = w_y/p$ kan vi lösa x_i och y_i och erhålla $x_i = f^{+}_{ix}\,(w_x/p,\, w_y/p)$ samt $y_i = f^{+}_{iy}\,(w_x/p,\, w_y/p)$. Vi kan sedan uppenbarligen skriva

$$X = \Sigma\, f^{+}_{ix}(w_x/p,\, w_y/p) \text{ och } Y = \Sigma\, f^{+}_{iy}(w_x/p,\, w_y/p)$$

Genom att därefter ur dessa ekvationer lösa ut w_x/p och w_y/p erhålles två ekvationer

$$w_x/p = Q_x(X, Y) \text{ och } w_y/p = Q_y(X, Y)$$

Dessa funktioner Q måste nu vara *entydiga*[1]. Genom att insätta dem i stället för prisrelationerna i uttrycken $x_i = f^{+}_{ix}(w_x/p, w_y/p)$ och $y_i = f^{+}_{iy}(w_x/p, w_y/p)$ kan vi därför alltid uttrycka variablerna x_i och y_i såsom entydiga funktioner av X och Y. Vi kan då skriva

$$x_i = H_{ix}(X, Y) \text{ samt } y_i = H_{iy}(X, Y) \qquad i = 1, \ldots n$$

Om nu dessa värden insättes i funktionen $\Sigma f_i(x_i, y_i)$ erhålles tydligen en entydig funktion av variablerna X och Y. Denna funktion definierar vi som $F(X,Y)$. Denna senare uppfyller då identiskt villkoret (A‴). Dess första derivator F'_X och F'_Y blir då

$$F'_X = \Sigma f'_{ix} H'_{ixX} + \Sigma f'_{iy} H'_{iyX} \text{ samt } F'_Y = \Sigma f'_{ix} H'_{ixY} + \Sigma f'_{iy} H'_{iyY}$$

där H'_{ixX}, H'_{ixY}, H'_{iyX} samt H'_{iyY} betecknar $\partial x_i/\partial X$, $\partial x_i/\partial Y$, $\partial y_i/\partial X$ resp. $\partial y_i/\partial Y$. Eftersom vi har $X = \Sigma x_i$ och $Y = \Sigma y_i$ måste tydligen dessa H-funktioner uppfylla villkoren $\Sigma H'_{ixX} = \Sigma H'_{iyY} = 1$ och $\Sigma H'_{ixY} = \Sigma H'_{iyX} = 0$. Eftersom vidare alla $f'_{ix} = w_x/p$ och alla $f'_{iy} = w_y/p$ följer därav att

$$F'_X = w_x/p \text{ och } F'_Y = w_y/p.$$

Därmed är visat, att funktionen F uppfyller villkoret (B‴).

Genom differentation av de nu sist angivna ekvationerna erhåller vi

$$F''_{XX}\,dX + F''_{XY}\,dY = d(w_x/p) \text{ samt } F''_{YX}\,dX + F''_{YY}\,dY = d(w_y/p).$$

De högra leden i dessa ekvationer måste samtidigt uppfylla ekvationerna

$$dx_i = f^{+\prime}_{ixx}\,d(w_x/p) + f^{+\prime}_{ixy}\,d(w_y/p) \text{ och } dy_i = f^{+\prime}_{iyx}\,d(w_x/p) + f^{+\prime}_{iyy}\,d(w_y/p).$$

Genom att summera över alla i och lösa ut prisrelationsdifferentialerna får vi här

$$d(w_x/p) = A_{11}\,dX + A_{12}\,dY \text{ samt } d(w_y/p) = A_{21}\,dX + A_{22}\,dY$$

där matricen $\| A_{ij} \|$ är lika med matricen

$$\| \Sigma f^{+\prime}_{iab} \|^{-1} \text{ för } a = x, y \text{ och } b = x, y.$$

Det inses nu emellertid, lätt, att denna matrix är identisk med matricen $(\Sigma \| f''_{iab} \|^{-1})^{-1}$, vilket alltså innebär, att matricen $\| F''_{ab} \|$ blir definierad genom relationen $\| F''_{ab} \|^{-1} = \Sigma \| f''_{iab} \|^{-1}$, dvs. såsom ett slags harmoniskt medeltal av de individella matricerna.[2] Eftersom nu samtidigt dessa senare

---

1 Vid givna värden på X och Y måste de prisrelationer, som är förenliga med dessa värden satisfiera differentialekvationerna $\Sigma f^{+\prime}_{ixx}\,d(w_x/p) + \Sigma f^{+\prime}_{ixy}\,d(w_y/p) = 0$ samt $\Sigma f^{+\prime}_{iyx}\,d(w_x/p) + \Sigma f^{+\prime}_{iyy}\,d(w_y/p) = 0$. Om nu funktionerna Q *inte* vore entydiga måste detta innebära att de linjer, som svarar mot dessa ekvationer, antingen tangerar varandra eller skär varandra i mer än en *enda* punkt. I det förra fallet måste linjernas derivator vara lika stora i två eller flera punkter och i det andra fallet måste den ena linjens derivata vara *större* än den andra linjens i *en* punkt och *mindre* i en annan. Inget av dessa alternativ kan emellertid uppkomma, om matricen $\| \Sigma f^{+\prime}_{iab} \|$ för $a, b = x, y$ är negativt definit. Och det måste den i själva verket vara, ty den är uppenbarligen lika med matricen $\Sigma \| f''_{iab} \|^{-1}$ och eftersom denna måste vara negativt definit måste matricen $\| \Sigma f^{+\prime}_{iab} \|$ ha samma egenskap. Därav följer, att funktionerna Q är entydiga.

2 I det fall, då endast *en* variabel produktionsfaktor betraktas, erhålles med lätt insedda beteckningar $1/F'' = \Sigma \frac{1}{f''}$

alla är negativt definita måste då tydligen matricen $\|F''_{ab}\|$ vara detta. Därmed är också bevisat, att funktionen F uppfyller villkoret (C''').

Det må nu observeras, att funktionen F såsom den här definierats är identisk med den funktion, som erhålles, om man löser problemet att finna den funktion, som maximerar den sammanlagda produktionen under bivillkoren att summorna X och Y är givna. Detta förhållande innebär i själva verket, att full analogi erhålles mellan det mikroekonomiska och det makroekonomiska produktionsfunktionsbegreppets definitioner. Som sagts ovan är ju inom produktionsteorien en produktionsfunktion definierad såsom den *maximala* produktion, som kan åstadkommas vid alternativa faktorinsatser.

Av vad som sagts i detta avsnitt framgår, att aggregationen över företag i och för sig inte vållar några komplikationer, om aggregationsvillkoren begränsas till att gälla jämviktslägen. En sådan aggregation är alltid möjlig, såvida den inte implicerar även en aggregation över varor eller över produktionsfaktorer. Sistnämnda typ av aggregation kan naturligtvis inte bli *mindre* inadekvat om den sker i samband med en aggregation över företag, än den är vid betraktandet av ett enstaka företag. Vid *proportionella* prisvariationer måste emellertid en samtidig aggregation över varor, produktionsfaktorer och företag alltid vara möjlig. Eftersom nämligen alla dessa tre typer av aggregation är möjlig var och en för sig kan man ju alltid utföra den i tur och ordning utan att råka i konflikt.

VI. Aggregation vid dynamisk analys

I de föregående avsnitten har visats, att aggregationen över företag inte vållar några komplikationer samt att aggregationen över varor och produktionsfaktorer är möjlig vid proportionella prisvariationer, men däremot inte möjlig i de mer generella fall, då inga restriktioner finns angående prisförändringarna. Härvid har dock problematiken begränsats till att gälla lägen, i vilka jämvikt råder. I detta avsnitt skall problemställningen generaliseras genom en utvidgning av aggregationsvillkorens giltighet till även sådana lägen i vilka jämvikt inte råder. Frågan blir då vilka konsekvenser för aggregationsmöjligheterna en sådan generalisering innebär.

Eftersom jämviktslägena måste betraktas som specialfall av de situationer, som betraktas inom dynamisk teori, är det tydligt att de typer av aggregation, som *inte* är möjliga i jämviktslägena inte heller kan vara möjliga i det mer generella fallet. Härav följer, att aggregation över varor och produktionsfaktorer är utesluten vid en dynamisk analys, såvida inte några speciella villkor finns angående prisernas variationer. Aggregering över varor och produktionsfaktorer har vi här därför ingen anledning att gå in på annat än för att undersöka, om även vid en dynamisk analys aggregering är möjlig vid *proportionella* prisvariationer. Kvar står sedan problemet om aggregation över företag alltid är möjlig även vid ett dynamiskt betraktelsesätt. Det är dessa två frågor, som skall behandlas i föreliggande avsnitt.

Antag att ett enstaka företag har produktionsfunktionen $f(x_1, x_2)$ och att relationen mellan dessa två produktionsfaktorers priser är fix, så att $w_1 = a_1 w$ och $w_2 = a_2 w$. Antag vidare, att den dynamiska teori det här gäller innefattar två rörelseekvationer för produktionsfaktorernas kvantiteter, säg $dx_1 = g_1 dt$ och $dx_2 = g_2 dt$, där g_1 och g_2 är två funktioner. Sätt $X = a_1 x_1 + a_2 x_2$. Frågan blir då denna: Kan vi bilda en funktion $F(X)$, som uppfyller villkoret $F(X) = f(x_1, x_2)$ för alla värden x_1, x_2, som är förenliga med rörelseekvationerna, samt en funktion G, som är ett aggregat av g_1 och g_2. Givetvis måste funktionen F för alla de värden på x_1 och x_2, som utgör jämviktslägen, uppfylla alla de villkor, som angivits i avsnitt IV.

Naturligtvis är svaret på den nu ställda frågan beroende av hur rörelseekvationernas funktioner g_i ser ut. Även utan att specificera dessa funktioner kan man dock delvis besvara frågan.

För att villkoret $F(X) = f(x_1, x_2)$ skall vara uppfyllt måste entydiga samband föreligga mellan x_1 och x_2 samt X. Eftersom vidare jämviktsvillkoren måste vara uppfyllda, i de lägen, då jämvikt råder, måste emellertid dessa samband vara just de, som impliceras av dessa villkor, och det innebär, att punkten (x_1, x_2) endast kan röra sig på den s. k. expansionslinjen. Denna linje karakteriseras av likheten $f'_1/a_1 = f'_2/a_2$ och därav följer att rörelseekvationerna för produktionsfaktorernas kvantiteter måste uppfylla villkoret

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_1 f''_{22} - a_2 f''_{12}}{a_2 f''_{11} - a_1 f''_{12}}$$

Det är här tydligen fråga om en mycket stark inskränkning av rörelseekvationernas generalitet. Den icke ovanliga typen av rörelseekvation $dx_i = A (e_i - x_i)dt$, där e_i är de kvantiteter som svarar mot jämviktslägen vid gällande priser, uppfyller exempelvis *inte* detta villkor.

Säg nu emellertid, att den dynamiska teorien verkligen uppfyller villkoret ovan, och att $df'_i/a_i = A\,(E - X)\,dt$, d. v. s. att

$$dx_i = \frac{A\,(E - X)(a_i f''_{jj} - a_j f''_{ji})\,dt}{f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2}, \quad \text{där } E = a_1 e_1 + a_2 e_2 \qquad i,j = 1, 2$$

Då uppkommer frågan, om den makroekonomiska analogin till dessa ekvationer gäller. Kan vi m. a. o. skriva $dX = A\,(E - X)\,dt/F''$. Ja, i detta fallet blir denna likhet automatiskt uppfylld. Genom att multiplicera de båda rörelseekvationerna med a_1 och a_2 samt summera erhålles nämligen

$$dX = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 = A\,(E-X)\,K\, dt$$

där K är lika med $a_2^2 f_{11}'' + a_1^2 f_{22}'' - 2a_1 a_2 f_{12}''$ dividerat med $f_{11}'' f_{22}'' - (f_{12}'')^2$. Men, det är lätt härlett, att detta uttryck är just lika med $1/F''$.

Vi kan nu övergå till att undersöka frågan, om aggregation över företag är möjlig. Det är då tillräckligt att betrakta företag, som framställer samma vara och som därvid använder en och samma produktionsfaktor. Om vi då betecknar företagens produktionsfunktioner med $f_i(x)$ för $i = 1, \ldots n$ och tänker oss n stycken rörelseekvationer blir frågan dels om vi kan bilda en funktion $F(X)$, där X är lika med Σx_i, så beskaffad att den uppfyller de vanliga jämviktsvillkoren i alla lägen, där jämvikt råder, dels om vi kan aggregera rörelseekvationerna.

Svaret på denna fråga är i själva verket likartat med svaret på den förra frågan. För vilka rörelseekvationer som helst kan man naturligtvis inte finna den sökta funktionen. Eftersom F skall uppfylla de vanliga jämviktsvillkoren i alla lägen, då jämvikt råder, kan F bli entydig endast i de fall, då rörelseekvationerna för faktorkvantiteterna implicerar att de marginella produktiviteterna inom alla företag är lika, dvs. att

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{f_j''}{f_i''}$$

Om detta villkor är uppfyllt är problemet uppenbarligen reducerat till just det som betraktades i föregående avsnitt, och då blir tydligen aggregationen möjlig.

VII. Slutord.

Av vad som sagts i de föregående avsnitten har framgått, att mycket speciella villkor måste vara för handen för att rättfärdiga den typ av aggregation, som är vanlig i praktiskt taget all makroanalys. Detta förhållande måste vi naturligtvis acceptera och rätta oss efter. Att därav dra den slutsatsen, att det makroekonomiska analysförfarandet, som ju alltid måste innebära en mängd inadekvata aggregationer, skulle vara ofruktbart, förefaller dock vara helt omotiverat. Snarare borde man väl kunna uttrycka saken så, att man vid en analys alltid har anledning att *komplettera* den makroekonomiska teorien med en undersökning av de *speciella* verkningar, som härrör från sådana omständigheter, som gör en stark aggregering inadekvat. På så sätt skulle analysen kunna sägas bli uppdelad i två delar: den rena makroteorien, där man laborerar med starkt aggregerade variabler, samt teorien för verkningarna av förskjutningar i prisrelationer och andra med aggregationen icke förenliga omständigheter.