

Några exempel på praktisk användning av Markov-kedjor

av docent Anders Klevmarken

1. Inledning

Slår man upp ordet Markov-kedja i en statistisk ordbok (t. ex. Kendall & Buckland [1957]), finner man att det används i två betydelser. Antingen är det en Markov-process med en diskontinuerlig tidsparameter eller också är det en Markov-process, vars värdeförråd är diskontinuerligt. En Markov-process är en stokastisk process sådan att sannolikheten för varje framtida tillstånd betingad av dagens tillstånd är oberoende av processens tidigare historia.

I de undersökningar som jag valt att presentera som utgångspunkt för en diskussion om tillämpningen av Markov-kedjor arbetar man både med en diskontinuerlig tidsindelning och ett diskontinuerligt värdeförråd. Antalet tillstånd är dessutom ändligt. Förutom i den just nämnda betydelsen användes i denna artikel benämningen Markov-kedja också i samband med vissa räkneoperationer på empiriska fördelningar, även om dessa inte motiveras av en sannolikhetsmodell. Innebörden av detta kommer att framgå nedan.

De tre undersökningar som behandlas i det följande är:

1. Söderman, Inga: Markovkedjemodeller av jordbrukets strukturomvandling. Essete Studium, Uppsala 1974.
2. Eriksen, Tor Eiler: En prognosmodell

för den allmänna tilläggspensioneringen, ATP. Riksförsäkringsverket, Stockholm 1973.

3. McCall, John J.: A Markovian Model of Income Dynamics. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 66. No 335 (Sept 1971).

Efter en presentation av några karakteristiska drag i var och en av dessa undersökningar kommer, mot denna bakgrund, några av de problem som är förknippade med tillämpningen av Markov-kedjor att behandlas.

Det bör kanske redan inledningsvis betonas att avsikten med artikeln inte är att ge en översikt av teorin för Markov-kedjor. De matematiska egenskaperna hos Markov-kedjor kommer endast att beröras när detta motiveras av ett konkret empiriskt problem. Jag ser det inte heller som min uppgift att granska och kritisera de enskilda undersökningarna som sådana utan i stället att försöka få en inblick i vad den empiriska tillämpningen av Markov-kedjor kan ge i utbyte.

2. Södermans undersökning

Södermans undersökning ska ses mot bakgrund av den debatt om jordbrukets villkor som vi haft i Sverige under efterkrigstiden. Många små brukningsenheter med låg lönsamhet och ineffektiv produktion har givit oss höga livsmedelspriser samti-

digt som jordbrukarnas ekonomiska och sociala levnadsförhållanden inte stigit i takt med de som gäller i samhället i övrigt. Man har därför med jordbrukspolitiken velat stimulera till en nedläggning av små brukningsenheter och till en sammanslagning till större enheter.

Södermans studie är en analys av företagsnedläggning och storleksrationalisering inom Örebro län. Det huvudsakliga primärmaterial är jordbruksräkningar från åren 1951, 1956, 1961 och 1966.

Antag att vi observerat brukningsenheternas storleksfördelning för 1951 och 1956:

Tab. 1. Brukningsenheternas storleksfördelning 1951 och 1956 (promille)

	1951 v_0	1956 v_1
S_0	189	285
S_1	200	150
S_2	192	158
S_3	128	118
S_{10}	096	092
S_{11}	096	095
S_{20}	061	063
S_{21}	026	027
S_{100}	012	012

Källa: Söderman [1974] (tab. 9, sid. 34).

Tab. 2. Övergångsmatrisen M för 1951/56 (promille)

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_{10}	S_{11}	S_{20}	S_{21}	S_{100}
S_0	957	268	153	088	038	033	021	053	—
S_1	829	643	079	005	003	—	—	—	—
S_2	810	873	671	090	014	004	—	—	—
S_3	002	013	072	693	103	020	009	—	—
S_{10}	001	001	017	076	718	087	021	—	—
S_{11}	—	002	007	034	107	755	103	005	—
S_{20}	—	—	002	013	017	091	791	085	—
S_{21}	—	—	—	001	—	007	053	836	070
S_{100}	—	—	—	—	—	001	002	021	930

Källa: Söderman [1974] (tab. 7, sid. 31).

Klassindelningen av materialet framgår av tabellen. S_2 omfattar jordbruk med 2—5 ha åkerjord, S_3 5—10 ha, osv. Till klassen S_0 har förts alla enheter mellan 1 och 2 ha. Man kan betrakta denna klass som en uppsamlingsklass för icke aktiva (nedlagda) jordbruk. (En diskussion av 0-klassens egenskaper och betydelse genomföres i avsnitt 5.)

Vi finner att nettoandelen nedlagda brukningsenheter ökat. Andelen stora enheter har förblivit oförändrad eller i något fall t. o. m. ökat. Om all information vi har om jordbrukets strukturrationalisering är begränsad till dessa två fördelningar, är det inte så lätt att uttala sig om hur rationaliseringen kommer att utvecklas. Det enda vi egentligen kan göra är att skriva fram den observerade förändringen i dessa två fördelningar. Vi skulle således finna att andelen nedlagda jordbruk ökade och att även andelen större jordbruk ökade något.

Antag att vi nu dessutom vet hur många enheter som flyttat från en storleksklass till en annan. Hur skulle vi kunna utnyttja denna information? Det kan vara naturligt att omvandla de absoluta övergångsfrekvenserna till relativa frekvenser, så att vi kan se hur stor andel av jordbruksföretagen i resp. storleksklass 1951 som 1956

Tab. 3. Observerade och beräknade storleksfördelningar samt gränsfördelningar (promille)

Övergångsmatris från år	1951	1956	1961	1966	1971	1976	1981	
S_0	189	285	357	412	456	490	519	v_{10}
S_1	200	150	118	098	084	076	070	764
S_2	192	158	133	113	097	086	077	073
S_3	128	118	108	098	089	081	075	050
S_{10}	096	092	088	083	079	075	071	031
S_{11}	096	095	093	091	089	086	083	025
S_{20}	061	063	064	065	065	065	064	019
S_{21}	026	027	027	028	029	029	029	009
S_{100}	012	012	012	012	012	012	012	004
S_0	285	380	452	508	552	587	606	874
S_1	150	108	081	064	052	044	044	030
S_2	158	129	104	085	070	059	048	020
S_3	118	096	079	066	056	048	048	012
S_{10}	092	078	067	058	050	044	044	008
S_{11}	095	099	099	096	092	087	087	017
S_{20}	063	070	075	079	081	082	082	022
S_{21}	027	028	030	031	033	034	034	011
S_{100}	012	012	013	013	014	014	014	006
S_0	380	525	621	688	737	773	798	985
S_1	108	059	035	021	014	014	001	001
S_2	129	088	060	042	030	026	023	003
S_3	096	066	047	034	025	021	001	001
S_{10}	078	058	044	034	026	026	001	001
S_{11}	099	082	067	055	045	045	002	002
S_{20}	070	073	071	067	061	061	003	003
S_{21}	028	036	041	045	047	047	003	003
S_{100}	012	013	014	014	015	015	001	001

Källa: Söderman [1974] (tab. 9, sid. 34).

Ant: Fördelningar med kursivstil är beräknade fördelningar, utan kursivstil observerade fördelningar.

hade övergått till var och en av de övriga klasserna resp. förblivit i sin klass (tab. 2).

Om vi använder vektorbeteckningarna v_0 och v_1 för de marginella fördelningarna 1951 resp. 1956 och beteckningen M för matrisen av övergångsfrekvenser så gäller uppenbarligen

$$v_1' = v_0' M \quad (1)$$

Har vi ingen annan information om strukturomvandlingen än vad som finns i dessa fördelningar, kan det vara naturligt att

undersöka hur marginalfördelningarna skulle förändras om matrisen av övergångsfrekvenser förblev oförändrad. Vi får

$$v_2' = v_1' M = v_0' M^2 \quad (2)$$

och

$$v_t' = v_0' M^t, \quad t = 1, \dots \quad (3)$$

Kommer sekvensen av marginalfördelningar v_t att närma sig ett gränsvärde? Från teorin för Markov-kedjor vet vi att svaret beror på M 's egenskaper. Gen M

derna och med denna deskription nå ganska långt i förståelsen av dem.¹

Hittills har vi endast undersökt hur de olika storleksklassernas relativa frekvenser förändrats under angivna villkor utan att någon modell för jordbruksenheternas storleksförändring införts. Man skulle emellertid också kunna tänka sig att betrakta de observerade frekvenserna och förändringarna i dessa som resultatet av en stokastisk process för individuella jordbruk. Vi måste då taga ställning till en serie av problem: hur ska modellen för denna process se ut, hur kan vi estimerade dess parametrar, hur kan vi testa dess rimlighet, vilka egenskaper får de prognoser som vi kan göra med modellen osv. (Litteraturhänvisning till teorin för inferens i Markov-kedjor; Anderson & Goodman [1957], Kemeny & Snell [1960].)

Vad skulle vi vinna med att ansätta en stokastisk modell? Dels skulle det kunna berika tolkningen av de observerade förändringarna, dels skulle vi kunna göra prognoser med kända egenskaper på den framtida utvecklingen. Det senare förutsätter givetvis att vi kan göra troligt att vi har en realistisk modell, eljest blir prognoserna meningslösa och eventuella sannolikhetsuttalanden om dem kan t. o. m. vara vilseledande.

Antag nu att vi tror att en Markov-process är en lämplig modell för jordbrukets strukturomvandling. Vi tänker oss således att varje jordbruk vid tidpunkten t tilldelas en storleksklass med en sannolikhet som beror på vilken klass enheten till-

hörde vid $(t-1)$, men som är oberoende av dess tidigare tillväxthistoria och av andra jordbruksenheter. Nu kanske någon invänder att den storleksklassen enhet kommer att tillhöra, om den lägges ned eller ej, inte bara beror på hur stor den var vid föregående tidpunkt utan även på andra faktorer, t. ex. på den vinst som jordbruket gav. Den betingade sannolikheten för övergång till tillstånd j skulle då skrivas

$$P(S_t = j | S_{t-1} = i, \text{vinst}_{t-1} = k) \quad (4)$$

Denna invändning behöver emellertid inte vara förödande för modellen, ty om vinsten också är betingad av storleken får vi

$$\sum_k P(S_t = j | S_{t-1} = i, \text{vinst}_{t-1} = k) P(\text{vinst} = k | S_{t-1} = i) = P(S_t = j | S_{t-1} = i) \quad (5)$$

En figur kan åskådliggöra modellen på följande sätt

$$\begin{array}{ccc} \text{vinst}_{t-1} & \searrow & \\ & \uparrow & S_t \\ S_{t-1} & \nearrow & \end{array}$$

Även med följande schema skulle en Markov-modell rättfärdigas:

$$S_{t-1} \rightarrow \text{vinst}_{t-1} \rightarrow S_t$$

Om däremot vinsten inte bara bestäms av storleken utan även av t. ex. världsmarknadspriserna, som i sin tur inte har med storleken att göra, då är en enkel Markov-modell som enbart beaktar närmast föregående periods storlek inte adekvat.

$$\text{pris}_t$$

$$\downarrow$$

$$S_{t-1} \rightarrow \text{vinst}_{t-1} \rightarrow S_t$$

Om övergångssannolikheterna för givna världsmarknadspriser vore konstanta, dvs. om för givna priser Markov-processen vore homogen, så skulle variationer i dessa priser kunna medföra att processen

obetingat priserna blev inhomogen. Med denna modell skulle man således behöva kontrollera effekterna av världsmarknadspriserna på ett eller annat sätt.

Låt oss nu återvända till Södermans undersökning. Redan genom okulär besiktning av tab. 3 kan vi konstatera att en homogen Markov-kedja inte är en lämplig modell för strukturomvandlingen i jordbruket. Söderman gör inte heller några försök till prognoser. Däremot förefaller hon inte främmande för att toika de observerade frekvenserna som resultatet av en individuell Markov-process. Den observerade övergångsmatrisen för t. ex. 1951/56 kan då betraktas som en maximum likelihood skattning av motsvarande teoretiska matris. De från denna matris beräknade gränsfördelningarna är konsistenta skattningar av det jämviktstillstånd som den teoretiska matrisen för 1951/56 leder till, dvs. i analogi med ovanstående en skattning av det jämviktstillstånd som skulle uppnås om världsmarknadspriserna förblevo desamma som 1951.

Med detta betraktelsesätt blir det meningsfullt att skatta sådana storheter som t. ex. den genomsnittliga övergångstiden från en storleksklass till en annan för en jordbruksenhet. Söderman har undersökt detta för övergångar till 0-klassen. Hon har därvid betraktat 0-klassen som en absorberande klass och för var och en av de övriga tillstånden (klasserna) skattat hur lång tid det i förväntan tar innan en jordbruksenhet absorberats, dvs. läggs ned. I analogi med demografin talar hon om den "sannolika återstående medellivslängden". I tab. 7 redovisas resultatet av dessa beräkningar.

Man får tolka hennes resultat så att med de förhållanden som rådde 1951/56 så skulle den sannolika återstående livs-

Tab. 7. Den genomsnittliga övergångstiden från olika storleksklasser fram till absorption i 0-klassen enligt tre alternativ (Redovisning i 3-årssteg)

Storleksklass	I	II	III
S_1	5,4	4,6	2,1
S_2	9,1	8,6	3,8
$S_{3,4}$	14,5	12,7	5,5
S_5	19,6	17,5	8,5
$S_{6,7}$	22,9	20,7	10,4
S_8	25,4	23,1	12,3
$S_{9,10}$	25,0	28,2	14,3
S_{100}	39,4	32,6	15,2

Ann.: I = enligt övergångsmatrisen 1951/56
II = " " " 1956/61
III = " " " 1961/66

Källa: Söderman [1974] (tab. 18, sid. 51).

längden skattas till 5,4 femårsperioder för de minsta jordbruken och 39,4 för de största. Omvandlat till år och inkl. själva absorptionsfasen skulle de minsta jordbruken i genomsnitt ha lagts ned efter $5(5,4+1) = 32$ år. Med de förhållanden som rådde under perioden 1961/66 skulle nedläggningen gått betydligt snabbare, för de minsta jordbruken i genomsnitt 15,5 år.

Söderman har också skattat det genomsnittliga antal "transitoklasser", som en jordbruksenhet passerar på vägen mot nedläggning, och beräknat kvoten mellan övergångstiden och antal klasser som tolkas som den genomsnittliga uppehållstiden per transitoklass (tab. 8).

Hon finner att de medelstora jordbrukens storlek förändras något flera gånger än de små och de stora jordbrukens och att varje förändrings varaktighet är större ju större jordbruket är. Den snabbare strukturförändringen under 1961/66 jämfört med de tidigare perioderna yttrar sig både i en mera direkt väg mot nedläggning och i en kortare genomsnittstid i varje storleksklass.

¹ Det finns även andra sätt att beskriva de observerade förändringarna. En metod är att göra en s. k. spektraluppdelning av övergångsmatrisen. Denna uppdelas då i komponenter från vilka man kan utläsa med vilken hastighet processen närmar sig sitt gränsvärde och vilken väg den tar dit. För en närmare redogörelse för denna metod se Theil [1972].

Tab. 8. Det genomsnittliga antalet transito-klasser som passeras från ursprungsklass fram till absorption (μ) samt den genomsnittliga uppehållstiden i transito-klass (u), uttryckt i antalet 5-årssteg

Storl. klass	μ			u		
	I	II	III	I	II	III
S_2	1,8	1,7	1,2	3,0	2,7	1,8
S_3	2,5	2,6	1,7	3,6	3,3	2,3
S_{10}	3,2	3,9	2,4	4,6	3,3	2,2
S_{15}	3,3	4,8	3,4	5,9	3,6	2,5
S_{20}	2,9	3,1	3,1	8,0	6,7	3,3
S_{30}	2,8	2,4	2,5	9,1	9,6	4,9
S_{50}	2,7	2,7	2,0	9,4	10,4	7,3
S_{100}	2,3	2,8	2,0	17,4	11,6	7,4
Medeltal	2,7	3,0	2,3	7,6	6,4	4,0

Källa: Söderman [1974] (tab. 19, sid. 52).

Söderman drar bl. a. följande slutsats från sin analys (sid. 52):¹

"Med 1950-talets förda jordbrukspolitik skulle det, vilket framgår av de — skattade övergångstiderna från de två första perioderna, — ta orimligt lång tid att rationalisera bort småbruken. Om man företagit ovan relaterade mätningar några år efter det att 1947 års jordbrukspolitik börjat verka, hade de politiska beslutsfattarna på ett tidigare stadium än som blev fallet kunnat inse, att en omläggning av jordbrukspolitiken var nödvändig. Otillräckliga kunskaper om den strukturomvandlande processens verkningar på lång sikt bidrog säkerligen till att fördröja en omprövning av den fram till 1960-talet förda politiken.

En reflektion man gör efter att ha läst denna slutsats är: "Hur mycket av skillnaderna i strukturell förändring mellan de tre perioderna beror på förändringar i den förda jordbrukspolitiken?" Även om poli-

tiken varit oförändrad skulle vi kanske fått den observerade snabbare utvecklingen under 1960-talet. En beskrivning med Markov-kedjor ger inte i sig tillräckligt underlag för att man ska kunna dra den slutsats Söderman drar, därtill krävs ytterligare information om orsakerna bakom jordbrukets omvandlingsprocess.

3. Eriksens undersökning

Syftet med Eriksens arbete är att konstruera ett prognosinstrument för ATP-systemet, som riksförsäkringsverket kan använda för att få underlag till sina rekommendationer till regering och riksdag om den framtida uttagsprocenten. Modellen ska också kunna användas för att analysera de försäkringsekonomiska effekterna av ändringar i lagen om ATP.

Pensionernas storlek bestäms som bekant av förvärvsinkomsternas storlek och fördelning över livscykel och de betalas ut antingen som ålderspensioner, förtidspensioner eller familjepensioner. Modellen kan sägas bestå av tre delar: en som klassificerar de individer som omfattas av ATP-systemet i demografiska och försäkringstekniska "statusgrupper" och som förklarar övergångarna mellan dem, en del som förklarar den individuella inkomstutvecklingen för dem som är aktiva på arbetsmarknaden, samt en del som beräknar utgifterna, intäkterna och fonderingen inom systemet.²

Eftersom pensionsreglerna är utformade så att man måste känna en individs hela inkomstförlöpp, från det han inträder i systemet till det att han pensioneras, för att beräkna hans pension; jämför t. ex. regeln om de 15 bästa åren och 30-årsregeln, så måste modellen på ett realist-

¹ För en fylligare redogörelse för och diskussion av Eriksens modell, se Klevmarken [1973].

Tab. 9. Estimerade övergångssannolikheter mellan inkomstklasser för män i åldern 34—50 år

År 1964	År 1965 Rak 0	Rak 0								
		—100	—200	—300	—400	—500	—600	—649	650	
Rak 0	0,858	0,060	0,035	0,024	0,014	0,005	0,003	0,001	0,006	0,006
0 ¹	0,587	0,204	0,119	0,052	0,018	0,008	0,006	...	0,008	0,008
—100	0,175	0,456	0,247	0,090	0,022	0,006	0,002	...	0,003	0,003
—200	0,041	0,124	0,486	0,285	0,049	0,011	0,002	...	0,001	0,001
—300	0,010	0,017	0,107	0,665	0,177	0,016	0,004	...	0,003	0,003
—400	0,004	0,006	0,020	0,174	0,657	0,119	0,013	0,001	0,006	0,006
—500	0,003	0,003	0,011	0,034	0,217	0,574	0,129	0,007	0,022	0,022
—600	0,004	0,001	0,006	0,014	0,044	0,222	0,522	0,053	0,134	0,134
—649	0,002	0,001	0,004	0,010	0,026	0,059	0,291	0,138	0,469	0,469
650	0,003	0,001	0,002	0,006	0,008	0,017	0,040	0,014	0,909	0,909

Källa: Eriksen [1973] (tab. VI: 5, sid. 81).

tiskt sätt återge *individuella* inkomstförlöpp. Det är inte tillräckligt att den ger goda prognoser på genomsnittliga inkomstförlöpp. För att lösa detta problem använder Eriksen en Markov-kedja som förklarar övergångarna mellan inkomstklasser. Inom ATP-systemet mätes inkomsterna i ATP-poäng. Inkomster under basbeloppet bokföres som 0 poäng och inkomster större än eller lika med 7,5 basbelopp bokföres som 6,5 poäng. I systemet finns således inbyggd en trunkering både av låga och höga inkomster. Uppgifter om de ursprungliga inkomsterna finns inte sparade i registren.

De tillstånd som ingår i Markov-modellen framgår av tab. 9.

Rak 0 består av de individer som aldrig tidigare erhållit någon poäng. 0¹ består av de som tidigare fått poäng men som år ($t-1$) inte hade någon. Skälet till denna utdelning av 0-tillståndet är att de två grupperna antages bestå av olika typer av människor med olika övergångssannolikheter. Den första gruppen består till stor del av 16-åringar och äldre studeranden, som inträder i systemet. Den andra grup-

pen består för männens del t. ex. av arbetslösa och för kvinnornas del av kvinnor som vandrar mellan hem och arbetsmarknad. Man kan också lägga märke till att Eriksen skilt ut de som har exakt 6,5 poäng. Det beror på att man i detta tillstånd kommer att få alla höginkomststigare som kan förväntas ha en större sannolikhet att förbli i tillståndet än de som ligger i poängklassen närmast intill.

Man kan säga att Eriksens modell är en blandning av en homogen och en icke homogen Markov-kedja, ty han antar att övergångssannolikheterna förändras alltefter som en individ blir äldre, dvs. det finns en övergångsmatris för varje successivt åldersår, men dessa antages vara desamma för alla generationer.

Med hjälp av ett sample från riksförsäkringsverkets s. k. poängband för 1964 och 1965 skattar Eriksen övergångssannolikheterna för vardera män och kvinnor. Före skattningen deflateras emellertid för varje individ 1965 års poäng med den genomsnittliga poängökningen mellan de två åren. Detta innebär att Markov-modellen *inte* användes för att förklara den

² Den del av den första mening som är satt mellan tankstreck är ej ett ordagrant citat.

genomsnittliga reallöneutvecklingen i samhället. Om Eriksen hade underlåtit att deflatera så skulle modellen ganska snart ge alla individer poängen 6,5. Markov-modellen användes nu för att förklara de individuella inkomstförloppens avvikelser från det förlopp som enbart den årliga genomsnittliga reallöneökningen skulle ge. Hur den genomsnittliga reallöneutvecklingen kommer att gestalta sig får man bedöma separat.

Eriksen har gjort några försök att bedöma realismen hos sin modell. Han undersöker antagandet om själva Markov-egenskapen genom att för några kohorter beräkna partiella korrelationskoefficienter mellan inkomsterna för två icke närbelägna år, t. ex. för inkomsterna 1965 och 1967, givet inkomsterna 1966. Även om korrelationskoefficienterna inte ligger koncentrerade kring noll, de är alla positiva, bedömer Eriksen att de är tillräckligt små för att Markov-ansatsen åtminstone av detta skäl ska vara användbar. Han beräknar också några olika inkomstfördelningar och jämför med observerade fördelningar. De avvikelser han får bedömer han som ganska små. Enbart genom att läsa Eriksens arbete är det svårt att taga ställning till hur robusta de simuleringar av enskilda inkomstförlopp, som Eriksen senare gör, är för antagandet om Markov-egenskapen. Som han själv påpekar bör det vara ganska vanligt att individer, som fått en tillfällig inkomstsänkning på grund av t. ex. sjukdom eller arbetslöshet, återgår till sin gamla inkomstnivå.

Den estimerade modellen användes således för att simulera individuella inkomstförlopp och för varje förlopp beräknas den pension som svarar mot detta förlopp. Tillämpningen av Markov-kedjan i Eriksens studie skiljer sig således ganska

mycket från Södermans studie. I den senare var man framför allt intresserad av hur marginalfördelningarna förändrades, t. ex. hur stor andel av jordbruken som skulle komma att läggas ned, men i Eriksens studie användes Markov-kedjan för att analysera variabiliteten i det individuella inkomstförloppet. Det är således själva rörelsen i processen som är intressant, de marginella inkomstfördelningarna är av underordnat intresse.

Även om man skulle kunna tänka sig andra modeller än en Markov-kedja som skulle kunna användas för samma ändamål, klarar Eriksen med Markov-ansatsen på ett ganska smidigt sätt två problem som annars skulle kunna vara svårhanterliga, nämligen trunkeringen av inkomsterna och vandringarna mellan förvärvsarbete och icke förvärvsarbete. I tidigare ATP-undersökningar har man haft svårt att förutsäga ökningen i den kvinnliga förvärvsverksamheten. En fördel med Markov-modellen är att behandlingen av förvärvsfrekvensens förändring och inkomstutvecklingen kan integreras. Detta är lätt att visa. Antag att matrisen med övergångstal endast är uppbyggd kring två klasser, de som inte förvärvsarbetar (0) och de som gör det (1). Antag också att antalet individer i resp. klass är n_0 och n_1 år t och att övergångssannolikheterna är P_{ij} ; $i, j=0,1$.

$$\begin{array}{c} \text{År} \quad t+1 \\ \begin{array}{cc} n_0 & P_{00} P_{01} \\ t & \\ n_1 & P_{10} P_{11} \end{array} \end{array} \quad (6)$$

Man inser omedelbart att om tillskottet av förvärvsarbetande $n_0 P_{01}$ är större än antalet som lämnar förvärvsarbetet $n_1 P_{10}$, dvs. om

$$\frac{P_{01}}{P_{10}} > \frac{n_1}{n_0} \quad (7)$$

kommer förvärvsintensiteten att växa. En nackdel med denna modell är å andra sidan att övergångssannolikheterna knappast är stabila.

4. McCalls undersökning

Användningen av Markov-kedjan för att analysera själva rörelsen i en process framgår särskilt tydligt i de tillämpningar som gäller social rörlighet, låginkomstproblem o. d. En given socialgruppsfördelning, yrkesfördelning eller inkomstfördelning kan vara resultatet av en process där samma individer ständigt förblir i samma tillstånd, t. ex. i den lägsta socialgruppen eller den lägsta inkomstklassen men det kan också vara resultatet av en process där individerna visar en mycket stor rörlighet mellan tillstånden. De politiska konsekvenserna blir rimligtvis helt olika i de två fallen.

Denna typ av tillämpning kan exemplifieras med McCalls användning av den så kallade "mover-stayer modellen" för att analysera låginkomstproblem i USA (McCall [1970, 1971 a,b]). Hans studie baseras på "the Continuous Work History Sample of the Social Security Administration" för åren 1957—66. Varje individ klassas varje år som fattig L, icke fattig \bar{L} , eller "uncovered" U beroende på om han har en inkomst som underskrider en viss gräns, överskrider gränsen resp. inte har registrerats för någon inkomst alls.

Tankegången bakom modellen är att det finns individer som förblir i resp. tillstånd med sannolikheten 1 (stayers) medan övriga individer som inte är bundna i ett visst tillstånd (movers) rör sig mellan tillstånden efter en enkel Markov-process:

$$p_{ijt} = \begin{cases} s_t + (1-s_t)m_{ijt}; & i=j=L, \bar{L}, U \\ (1-s_t)m_{ijt}; & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

s_t är andelen "stayers" i tillstånd i och m_{ij} övergångssannolikheterna i en Markov-kedja.

s_t skattas som andelen individer som befinner sig i tillstånd i under hela sampleperioden och m_{ijt} skattas som andelen "movers" från tillstånd i till tillstånd j mellan t och $t+1$. Om sampleperioden är lång kan dessa estimat betraktas som approximativa maximum likelihood estimat. Estimaterna av s_t måste dock vara ganska känsliga för hur lång sampleperioden är. Man får överskattningar om den inte är tillräckligt lång.

McCall är framför allt intresserad av att undersöka tre förhållanden:

1. Den så kallade "backwash thesis", dvs. att det finns en grupp av individer som alltid förblir fattiga. Den statistiska hypotesen är att $s_L \neq 0$.

2. Att andelen ständigt fattiga är större bland färgade än bland vita och att andelen icke fattiga är större bland de vita än bland de färgade, dvs.

$$s_L^N - s_L^W > 0 \text{ resp. } s_{\bar{L}}^W - s_{\bar{L}}^N > 0$$

3. Stabiliteten i övergångsmatrisen för den rörliga delen av populationen. McCalls hypotes är att övergångssannolikheterna är beroende av den ekonomiska tillväxten i samhället.

Tab. 10 på sid. 200 visar McCalls skattningar av andelen "stayers" i resp. tillstånd.

Med den test som McCall använt är alla andelarna signifikant skilda från noll. Resultaten visar att andelen permanent fattiga bland de färgade är större än andelen permanent fattiga bland de vita samt att det omvända förhållandet råder för dem som aldrig är fattiga.

Som ett exempel på den bristande stabiliteten i övergångsfrekvenserna redovisas i

Tab. 10. Male stayer proportions, 1957—1966

Age group as of 1960	Low earnings		Non-low earnings	
	Non-white	White	Non-white	White
25—34	.14	.05	.48	.64
35—44	.17	.08	.53	.69
45—54	.19	.10	.52	.65

Ann.: Gränsen mellan "low earnings" och "non-low earnings" är \$3 000.
Källa: McCall [1971b], table 1.

tab. 11 de skattade övergångsmatriserna från två tidsperioder för den del av den färgade populationen som är rörlig.

Resultaten visar att det var en starkare rörelse bort från tillståndet fattigdom 1965/66 än 1957/58. Sannolikheten att förbli fattig (P_{LL}) och sannolikheten att bli fattig (P_{LL}) har minskat medan sannolikheten att förbli i relativt välstånd (P_{LL}) resp. sannolikheten att lämna tillståndet

Tab. 11. Skattade övergångssannolikheter samt gränsfördelningen för färgade män som 1960 tillhörde åldersgruppen 35—44 år

Year and category	Non-white		
	L	\bar{L}	U
A. Mover matrices			
1957—58			
L	.74	.13	.14
\bar{L}	.40	.58	.02
U	.28	.02	.70
1965—66			
L	.59	.26	.16
\bar{L}	.13	.86	.01
U	.19	.02	.78
B. Steady state distributions			
1957—58	.56	.18	.26
1965—66	.26	.51	.23

Ann.: Se ann. tab. 9.
Källa: McCall [1971b], table 3.

fattigdom (P_{LL}) har ökat.

McCall undersöker hur dessa förändringar i övergångssannolikheterna samvarierar med tillväxten i BNP (jfr exemplet med vinstens betydelse för jordbrukets storlek) och han finner med hjälp av en enkel regressionsanalys att en stark ekonomisk tillväxt påskyndar den rörliga befolkningens övergång från fattigdom till relativt välstånd.

5. Några problem vid tillämpningen av Markov-kedjor

Avslutningsvis skall jag beröra några problem vid tillämpningen av en Markov-kedja som är mer eller mindre gemensamma för alla tre undersökningarna.

5.1. Valet av klassgränser vid definitionen av tillstånd

I de två första undersökningarna studerades inte närmare resultatens robusthet för olika definitioner av tillstånden. I McCalls undersökning prövades tre olika gränser mellan fattig och icke fattig. Hans slutsatser påverkades inte av hur gränsen valdes.

Från teorin för Markov-kedja gäller för n tillstånd så kan man i allmänhet inte aggregera dessa tillstånd och tro att en Markov-kedja äger giltighet även för de aggregerade tillstånden. Detta innebär att om vi trots detta resultat beräknar övergångsmatriser för bägge aggregationsnivåerna så kommer de storheter vi härleder från övergångsmatriserna, såsom marginalfördelningar, gränsfördelningar, övergångstider osv., i allmänhet inte att bli desamma. Några empiriska studier visar dock att för marginalfördelningarna, gränsfördelningarna och den snabbhet med vilken man närmar sig jämviktstillståndet har aggregeringen ofta liten betydelse (Es-

berger & Malmquist [1972] och Theil [1972]). Däremot måste aggregationen påverka t. ex. de genomsnittliga övergångstiderna och antalet transitoklasser.

För en statistisk beskrivning, då frågan om existensen av en Markov-kedja på flera aggregationsnivåer inte är särskilt relevant, är det viktigt att veta vilka mått som är invarianta för klassificeringen av materialet. I en modellansats får man snarast uppfatta dessa matematiska egenskaper hos Markov-kedjan som en uppmaning att välja klassgränser med omsorg, samtidigt som man från de empiriska studierna således vet att en felspecificering av tillstånden inte behöver betyda så mycket för t. ex. prognoser på marginalfördelningarna. Däremot bör det ha större betydelse när det är själva rörelsen i processen som är huvudintresset. I detta sammanhang kan det vara lämpligt att erinra om de överväganden som låg bakom Eriksens definition av två 0-tillstånd och särskiljandet av tillståndet 6,5 poäng.

5.2. Tillämpningen av Markov-kedjor på inhomogena grupper

Ett närbesläktat problem är tillämpningen av Markov-kedjor på inhomogena grupper. De resultat som redovisats från Södermans undersökning gällde hela hennes population av jordbruk. Hon har emellertid även utfört motsvarande analys sedan hon delat upp materialet på Hjälmarebygden och Bergslagsbygden och på mjölkproducerande och icke mjölkproducerande enheter. Man kan fråga om analysen av det uppdelade materialet ger en annan bild av utvecklingen för populationen som helhet än den analys som utfördes direkt på hela materialet.

Teorin säger återigen att gränsfördelningen från det sammanslagna materialet

endast under speciella villkor kommer att vara ett vägt medelvärde av gränsfördelningarna från delmaterialet. I praktiken har det dock visat sig att en sådan relation i allmänhet håller med ganska god approximation (Morrison m. fl. [1971], Esberger-Malmquist [1972]). Detta utesluter givetvis inte att man kan stöta på tillämpningar där inhomogeniteten i materialet verkligen är av betydelse. En svaghet med slutsatser av detta slag baserade på empiriska studier och på Monte Carlo experiment är att det är svårt att bedöma deras allmängiltighet.

5.3. Behandlingen av in- och utträden

Den enkla Markov-kedjemodellen är ett slutet system, dvs. ett system till vilket det varken finns något inträde eller utträde. I praktiska tillämpningar är detta ofta en orealistisk egenskap. Företag, individer eller de enheter vi nu studerar, försvinner från de register från vilka vi hämtar våra data och samtidigt tillkommer nya enheter.

Som vi har sett, har man i alla tre undersökningarna löst detta problem genom att introducera ett så kallat 0-tillstånd. Detta kallas ibland "reservoar-modellen för in- och utträden". En nackdel med denna modell är att det kan vara svårt att fastställa hur många individer som i initialskedet tillhör 0-tillståndet, dvs. man vet inte hur många individer som potentiellt skulle kunna vinna inträde i systemet. Övergångsfrekvenserna från 0-tillståndet blir därigenom i viss mån godtyckliga.

I Eriksens studie är detta kanske inte ett så stort problem, då man ganska bra visste vilka som kunde vinna inträde, genom att ATP-systemet omfattar hela den i Sverige bofasta befolkningen över 16 år. Immi-

granterna kan dock utgöra ett problem, då man inte vet hur många immigranter som potentiellt skulle kunna bli bosatta i Sverige.

I McCalls undersökning löser man problemet genom att bortse från det. Endast individer som någon gång under sampleperioden registrerats för en inkomst ingår i analysen.

I Södermans undersökning förde man till 0-tillståndet alla brukningsenheter med 1-2 ha åker. Man underlät då att beakta sådana brukningsenheter som kan vinna inträde på grund av t. ex. hemmansklyvning. Söderman uppger dock att detta är ganska ovanligt.

I en studie av Stanton & Kettunen [1967] har man undersökt hur framskrivningarna av marginalfördelningarna påverkas av hur många individer som antas tillhöra 0-tillståndet vid ursprungstillfället. Den visar att andelarna individer som faller på de aktiva tillstånden inte är beroende av hur många som ursprungligen tillhörde 0-tillståndet; detsamma gäller däremot inte antalet individer i resp. tillstånd. Samma studie visar också att antalet aktiva individer i jämvikt minskar ju större antalet potentiella inträdare är. Detta beror naturligtvis på att den skattade sannolikheten att förbli i 0-tillståndet ökar, ju större antalet potentiella inträdare är, dvs. 0-tillståndet blir nära nog ett absorberande tillstånd, när antalet individer i 0-tillståndet antas vara ett stort tal.

Detta förhållande gör att man börjar reflektera över Södermans resultat beträffande jordbrukets nedläggningstakt. Hur underbyggt är hennes antagande om antalet enheter i 0-tillståndet? Hur robusta är hennes resultat för detta antagande? Hon har nu låtit det totala antalet företag vara oförändrat under de tre perioderna. Är

det rimligt att alla de enheter som var potentiella inträdare 1951 men aldrig lämnade 0-tillståndet också var potentiella inträdare 1961? Om ej, skulle den beräknade nedläggningstakten från 1961/66 års övergångsmatris bli lägre än som nu är fallet. Utan att vara expert på jordbruksfrågor är det svårt att bedöma hur rimligt Södermans antagande är.

I Eriksens studie lade vi märke till att han använde sig av två 0-tillstånd, ett för att samla upp dem som aldrig inträtt i systemet och ett för att samla upp dem som utträtt. Det kan vara förnuftigt att göra en sådan uppdelning om man tror att sannolikheterna för återinträde skiljer sig från sannolikheterna för nyinträde. Detta kan generaliseras så att det mot varje aktivt tillstånd svarar ett icke aktivt. Duncan & Lin [1972] kallar detta "Stochastic exit to parallel inactive states". I sin artikel behandlar de också modeller för stokastiskt inträde. Antalet i systemet inträdande individer tillåts i dessa modeller att variera på ett stokastiskt sätt. För en närmare diskussion av olika modellspecifikationer och estimationsförfaranden hänvisas till Duncan & Lin [1972].

5.4. Homogeniteten i Markov-kedjan

Ett problem som återkommer i praktiskt taget alla undersökningar är hur man skall behandla icke stabila övergångsmatriser. Eriksen försökte uppnå stabila övergångsmatriser genom att redan från början deflatera bort realinkomstförändringen, som ju kan förväntas variera över tiden. McCalls undersökning är ett annat exempel på hur man kan gå tillväga. Han relaterade förändringarna i övergångssannolikheterna till förändringarna i BNP. Ett tredje exempel är Henrys [1971] så kallade "retension model". I en undersökning

av partisympatier delar han upp Markov-kedjan i två processer, en som bestämmer om ett partibyte över huvud taget skall äga rum och en som bestämmer till vilket tillstånd en flyttning sker under förutsättning att den blir av. Benägenheten att lämna sitt parti antar han blir mindre och mindre ju närmare valet kommer, medan övriga partiers relativa attraktivitet antas vara oförändrad. Återigen andra metoder bygger på att själva förändringen i övergångssannolikheterna skall vara stabil.

I försöket att formulera en realistisk modell är det naturligt att eftersträva enkelhet, bl. a. i bemärkelsen få okända parametrar. Den enkla Markov-kedjan är därför en intressant utgångspunkt, även om analysen senare skulle visa att man måste modifiera och avlägsna sig mer och mer från den enkla modellen. Man kan dock låga märke till att det inte bara är så att säga den funktionella formen för övergångsmatrisen som är avgörande för modellens realism utan även definitionen av tillstånd och grupperingen av materialet. Genom olyckliga definitioner och grupperingar kan man så att säga framkalla instabila övergångsmatriser. Det är t. ex. inte alls säkert att definitionen av tillstånden skall knytas till en enda variabel som storleken på jordbruksenheter eller som inkomsten, utan ibland kan man kombinera två eller flera variabler för att definiera tillstånden. Man kan då tala om en två- eller flerdimensionell process. Ett exempel på detta är en studie av yrkesmässig och geografisk rörlighet av David & Schroeder [1973].

6. Avslutande synpunkter

Möjligen kan någon fråga sig varför så lite utrymme använts för att diskutera själva Markov-egenskapen. Det beror bl. a.

på att diskussionen kring Markov-ansatsen ibland på ett ofruktbart sätt tycks koncentrera sig på frågan om den observerade processen verkligen är en Markov-process. Kan en så enkel modell vara empiriskt intressant? När Markov-kedjan används i deskriptivt syfte är Markov-egenskapens giltighet inte ett särskilt relevant problem och när man vill använda en modellansats då är det mera fruktbart att fråga hur man bäst kan utnyttja den information som finns i de observerade övergångsmatriserna; hur man kan formulera en modell som på ett tillfredsställande sätt förklarar och tolkar observationerna, i stället för att fråga: "Passar Markov-kedjemodellen?" Även om det skulle visa sig att man endast undantagsvis kan filtrera tillvaron genom en Markov-kedja, kan en Markov-ansats vara en lämplig utgångspunkt för en analys av empiriska övergångsmatriser. Södermans, Eriksens och McCalls undersökningar är exempel på detta.

7. Referenser

- Anderson, T. W. & Goodman, L. A.: 1957, "Statistical Inference About Markov Chains", *Annals of Mathematical Statistics*, 28, No. 1, 89—110
- McCall, J. J.: 1970, "An Analysis of Poverty: A Suggested Methodology", *Journal of Business*, Vol. 43 (Jan. 1970)
- : 1971 a, "An Analysis of Poverty: Some Preliminary Findings", *Journal of Business*, Vol. 43 (April 1971)
- : 1971 b, "A Markovian Model of Income Dynamics", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 66, No. 335 (Sept. 1971)
- David, M. & Schroeder, L.: 1973, *A Two-dimensional Mobility Process*, SSRI

- Workshop Series No. 7314, University of Wisconsin, Madison
- Duncan, G. T. & Lin, L. G.: 1972, "Inference for Markov Chains Having Stochastic Entry and Exit", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 67, No. 340 (Dec. 1972)
- Eriksen, T. E.: 1973, *En prognosmodell för den allmänna tilläggs pensioneringen ATP*, Riksförsäkringsverket, Stockholm
- Esberger, S. E. & Malmquist, S.: 1972, *En statistisk studie av inkomstutvecklingen*. Monografi nr 8 i anslutning till folk- och bostadsräkningen 1960, Allmänna förlaget, Lund
- Fisz, M.: 1965, *Probability theory and mathematical statistics*, 3rd edition John Wiley & Sons, Inc., New York
- McGinnis, R.: 1968, "A Stochastic Model of Social Mobility", *American Sociological Review*, Vol. 33, No. 5 (Oct. 1968)
- Henry, N. W.: 1971, "The Retention Model: A Markov Chain with Variable Transition Probabilities", *Journal of The American Statistical Society*, Vol. 66, No. 334 (June 1971)
- Kemeny, J. G. & Snell, J. L.: 1960, *Finite Markov Chains*, Princeton, N. J. Van Nostrand Co.
- Kendall, M. G. & Buckland, W. R.: 1957, *A Dictionary of Statistical Terms*, London
- Klevmarken, A.: 1973, "En ny modell för ATP-systemet", *Statistisk tidskrift* 1973: 5
- Morrison, D. G., Massy, W. F. & Silverman, F. N.: 1971, "The Effect of Non-homogeneous Populations on Markov Steady-State Probabilities", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 334 (June 1971)
- Stanton, B. F. & Kettunen, L.: 1967, "Potential Entrants and Projections in Markov Process Analysis" *Journal of Farm Economics*, Vol. 49 (Aug. 1967)
- Söderman, I.: 1974, *Markov-kedjemodeller av jordbrukets strukturomvandling*, Esselte Studium, Uppsala
- Theil, H.: 1972, *Statistical Decomposition Analysis*, North Holland, Amsterdam and London