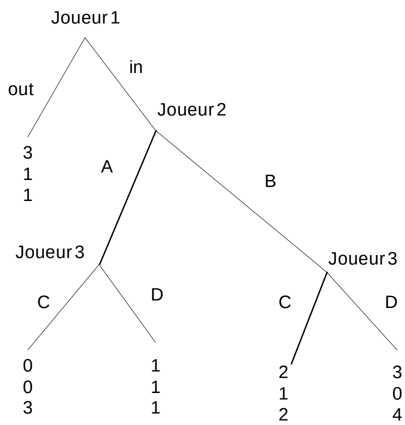
Stockhom University
Game Theory
Correction of the exam: 8 June 2013 (3 hours)

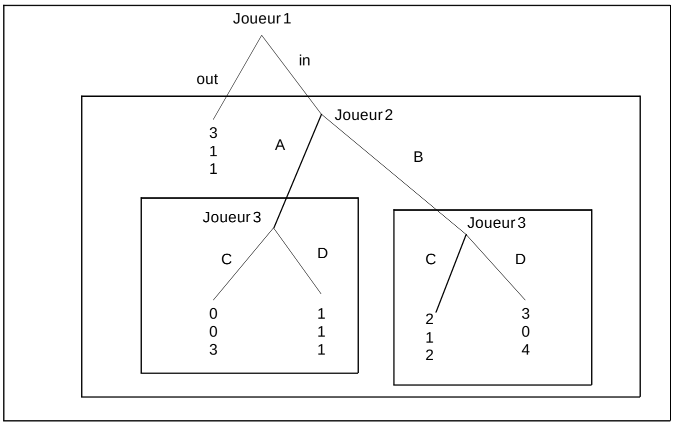
Question 1 (35 points)

Consider the following figure:



1a) How many subgames can you identify? Draw a figure showing all the subgames.

Il y a quatre sous-jeux et la figure suivante représente ces sous-jeux.



1b) Show that there does not exist a Subgame-Perfect Nash equilibrium in pure strategies.

Résolvons le dernier sous-jeu. On a la matrice suivante:

		Joueur 3	
		C	D
Joueur 2	A	0 , $\underline{3}$	$\underline{1}$, 1
	B	$\underline{1}$, 2	0 , $\underline{4}$

On voit bien qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures de ce sous-jeu puisque les meilleures réponses des joueurs sont indiquées en soulignant les chiffres.

1c) Calculate the unique Subgame-Perfect Nash equilibrium in mixed strategies

Supposons que le joueur 2 joue la stratégie A avec probabilité p et la stratégie B avec probabilité $1-p$. L'espérance d'utilité du joueur 2 est alors donnée par:

$$\begin{aligned} EU_2 &= p\left[q \times 0 + (1-q) \times 1\right] + (1-p)\left[q \times 1 + (1-q) \times 0\right] \\ &= p(1-q) + (1-p)\,q \end{aligned}$$

Le joueur 2 va choisir la probabilité p qui maximise son espérance d'utilité:

$$\max_p EU_2 = 1 - 2q$$

On a:

$$\frac{\partial EU_2}{\partial p} \gtreqless 0 \Leftrightarrow q \lesseqgtr \frac{1}{2}$$

et donc

$$\begin{cases} \text{si } q < \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p = 1 \\ \text{si } q > \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p = 0 \\ \text{si } q = \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p \in [0,1] \end{cases}$$

Supposons maintenant que le joueur 3 joue la stratégie C avec probabilité q et la stratégie D avec probabilité $1-q$. L'espérance d'utilité du joueur 3 est alors donnée par:

$$\begin{aligned} EU_3 &= q\left[p \times 3 + (1-p) \times 2\right] + (1-q)\left[p \times 1 + (1-p) \times 4\right] \\ &= q(p+2) + (1-q)(4-3p) \end{aligned}$$

Le joueur 3 va choisir la probabilité q qui maximise son espérance d'utilité:

$$\max_q EU_3 = 4p - 2$$

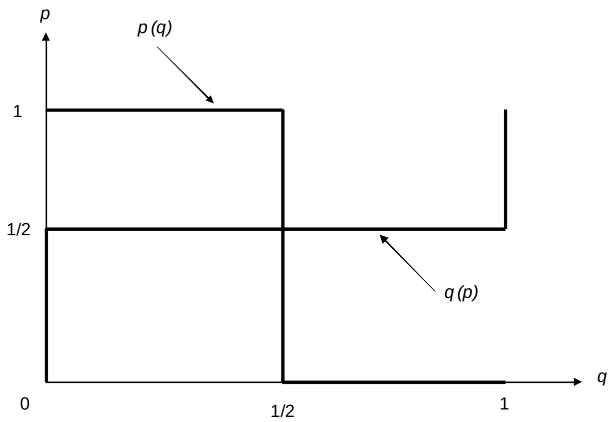
On a:

$$\frac{\partial EU_3}{\partial q} \gtreqless 0 \Leftrightarrow p \gtreqless \frac{1}{2}$$

et donc

$$\begin{cases} \text{si } p < \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q = 0 \\ \text{si } p > \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q = 1 \\ \text{si } p = \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q \in [0,1] \end{cases}$$

La figure suivante représente les fonctions de meilleures et réponses



et on voit bien qu'il existe un unique équilibre de Nash en strategies mixtes qui est

$$(p^*, q^*) = (1/2, 1/2)$$

Le joueur 1 doit décider d'entrer ou de ne pas entrer. S'il n'entre pas (out) il obtient 3 alors que s'il rentre (in) il obtient

$$\begin{aligned} EU_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 3\right] \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Puisque $3/2 < 3$, le joueur 1 n'entrera pas. Donc l'unique équilibre de Nash S-parfait en stratégies mixtes de ce jeu est (out,1/2,1/2).

Question 2 (25 points)

2a) La représentation en forme normale de ce jeu est:

		Joueur 2	(le voleur)
		S	NS
Joueur 1	M	$(A-c,-A)$	$(-c,0)$
(le gendarme)	NM	$(-B,B)$	$(0,0)$

2b) Les meilleures réponses sont:

		Joueur 2	(le voleur)
		S	NS
Joueur 1	M	$(\underline{A-c},-A)$	$(-c,\underline{0})$
(le gendarme)	NM	$(-B,\underline{B})$	$(\underline{0},0)$

Le jeu n'a clairement pas d'équilibre en stratégie pure.

Pour les stratégies mixtes, supposons que p est la probabilité que le joueur 2 joue S et q la probabilité que le joueur 1 joue M.

On a:

$$EU_1(M;q=1) = p\,(A-c) - (1-p)c = pA - c$$

$$EU_1(NM;q=0) = -pB$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Si } pA-c &> -pB \Leftrightarrow p > \frac{c}{A+B}, \text{ alors le joueur choisit M } (q=1) \\
\text{Si } pA-c &< -pB \Leftrightarrow p < \frac{c}{A+B}, \text{ alors le joueur choisit NM } (q=0) \\
\text{Si } pA-c &= -pB \Leftrightarrow p = \frac{c}{A+B}, \text{ alors le joueur est indifférent entre M et NM}
\end{aligned}$$

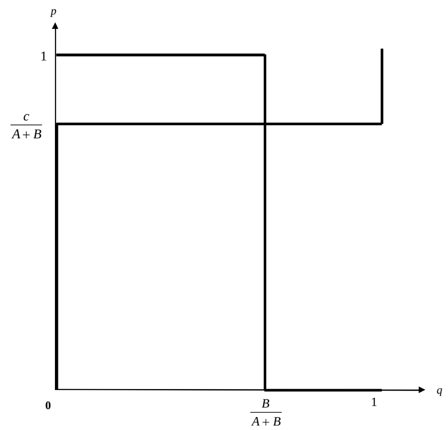
On a:

$$EU_2(S; p = 1) = -qA + (1 - q)B = B - q\,(A + B)$$

$$EU_2(NS; q = 0) = 0$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } B - q\,(A+B) & > & 0 \Leftrightarrow q < \dfrac{B}{A+B}, \text{ alors le joueur choisit S } (p = 1) \\
\text{Si } B - q\,(A+B) & < & 0 \Leftrightarrow q > \dfrac{B}{A+B}, \text{ alors le joueur choisit NS } (p = 0) \\
\text{Si } B - q\,(A+B) & = & 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{B}{A+B}, \text{ alors le joueur est indifférent entre S et NS}
\end{array}$$

On peut alors tracer la figure suivante:



On voit bien qu'il y a un unique équilibre de Nash en stratégie mixte qui est:

$$p = \frac{c}{A+B} \text{ et } q = \frac{B}{A+B}$$

Question 3 (40 points)

The decision of an action $a \geq 0$ of a child affects both his own revenue and that of his parents. The child is selfish: he only cares of the amount of money he has. On the contrary, his parent cares of how much money they have. The parent has to decide how much money to transfer to his child. This transfer is denoted by $t \geq 0$. The preferences of the parent are described by the following utility function:

$$U_p(a, t) = \log a + \log t - a\, t$$

The action a of the child can be interpreted as the number of hours he spends doing his homeworks. He has 24 hours available per day and sleeps 8 hours per day. His budget constraint can be written as :

$$16 = a + l$$

where l indicates the number of hours he spends in leisure and $24 - 8 = 16$ hours in the time available he has when he is not sleeping. The utility function of the child is given by:

$$U_c(a, t, l) = \log a + \log t + a\, l$$

Remember that for any function $\log [f(x)]$, we have the following derivative:

$$\frac{d \log [f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

where $f'(x)$ is the derivative of $f(x)$ with respect to x. In particular,

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

The timing of the game is as follows. First, the child decides the optimal a, that is the optimal number of hours spent in doing homeworks. Then, the parent decides the optimal amount of transfer $t \geq 0$, that is how much money he wants to transfer to his child.

3a) Model this situation as a game in extensive form.

The situation is modeled by the following game in extensive form:

Players: The parent and the child.

Terminal histories: The set of sequences (a, t), where a is the action of the child and t the parents' transfert to the child; a and t are real positive numbers.

The player function: $P(\varnothing)$ for the child, $P(a)$ for the parent for each value of a.

Preferences: The preferences of the child are:

$$U_c(a, t) = \log a + \log t + a\,(16 - a)$$

while that of the parent are:

$$U_p(a, t) = \log a + \log t - a\,t$$

3b) Solve the second stage of this game, that is the optimal choice of parents in terms of t. Denote the optimal choice by t^* and show that it is unique.

The parent solves the following program:

$$\max_t \{U_p(a, t) = \log a + \log t - a\,t\}$$

First-order condition is:

$$\frac{\partial U_p(a, t)}{\partial t} = \frac{1}{t} - a = 0$$

which implies that:

$$t^* = \frac{1}{a} \tag{1}$$

Second-order condition is:

$$\frac{\partial^2 U_p(a,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} < 0$$

and thus the second-order condition is always satified.

3c) Calculate the Subgame-Perfect Nash Equilibrium of this game. Determine the equilibrium values of t (parents' transfer), a (the child's number of hours spent doing homeworks), l (leisure), $U_c(a,t,l)$ (utility of the child), $U_p(a,t)$ (utility of the parent).

In the first stage, the child maximizes his utility by anticipating the choice of his parent. He solves the following program:

$$\max_a \{\log a + \log t^* + a(16-a)\}$$

By using the value of t^* in (1), one obtains:

$$\begin{aligned} & \max_a \left\{\log a + \log \frac{1}{a} + a(16-a)\right\} \\ = & \max_a \{a(16-a)\} \end{aligned}$$

The first-order condition is:

$$16 - 2a^* = 0$$

which implies that:

$$a^* = 8$$

and thus

$$t^* = \frac{1}{a^*} = \frac{1}{8} = 0.125$$

The second-order condition is always satisfied since it is equal to $-2 < 0$. By using the time constraint, we have:

$$l^* = 16 - a^*$$

which gives

$$l^* = 8$$

By replacing these values in the utility functions, we obtain:

$$\begin{aligned} U_c(a,t) &= \log a^* + \log t^* + a^* l^* \\ &= \log 8 - \log 8 + 64 \\ &= 64 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} U_p(a,t) &= \log a^* + \log t^* - a^* t^* \\ &= \log 8 - \log 8 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$