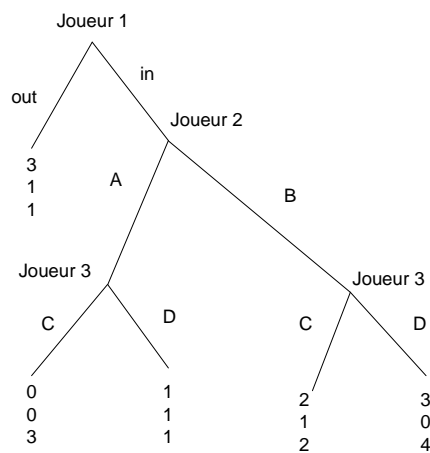


Université du Maine  
 Théorie des Jeux  
 Yves Zenou  
 Contrôle Continu: 16 decembre 2008  
 (1 heure et demi)

**Exercice 1.** Considérons la figure suivante:



Par convention, le paiement du joueur 1 est le premier paiement, le paiement du joueur 2 est le deuxième paiement, le paiement du joueur 3 est le troisième paiement.

**(1a)** Combien de sous-jeux pouvez-vous identifier? Faire une figure avec tous les sous-jeux.

**(1b)** Montrez qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash S-parfait de ce jeu en stratégies pures.

**(1c)** Calculez l'unique équilibre de Nash S-parfait de ce jeu en stratégies mixtes.

**Exercice 2.** La décision d'une action  $a \geq 0$  d'un enfant affecte à la fois son propre revenu et le revenu de ses parents. L'enfant est égoïste : il se préoccupe uniquement du montant d'argent qu'il a. Au contraire, ses parents se préoccupent à la fois de combien d'argent ils ont eux-mêmes et de combien d'argent leur enfant a.

Les parents décident de transférer de l'argent à l'enfant. Ce transfert est noté  $t \geq 0$ . Les préférences des parents sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U_p(a, t) = \log a + \log t + \frac{a}{t}$$

Ici, l'action  $a$  de l'enfant signifie le nombre d'heures qu'il passe à travailler ses devoirs. Comme tout le monde, il a 24 heures par jour et il dort 8 heures. Donc sa contrainte de temps s'écrit:

$$16 = a + l$$

où  $l$  signifie le nombre d'heures qu'il passe à faire du loisir. La fonction d'utilité de l'enfant est donnée par:

$$U_e(a, t, l) = \log a + \log t + \log l$$

On rappelle que pour toute fonction  $\log [f(x)]$ , on a:

$$\frac{d \log [f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

où  $f'(x)$  est la dérivée de  $f(x)$  par rapport à  $x$ . En particulier,

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Le timing du jeu est le suivant. Tout d'abord, l'enfant prend sa décision en déterminant de manière optimale le nombre d'heures  $a$  qu'il va consacrer à faire ses devoirs. Puis les parents décident le montant de  $t$ , c'est à dire combien d'argent ils vont transférer à l'enfant.

**(2a)** Modéliser cette situation comme un jeu en forme extensive.

**(2b)** Résolvez la deuxième étape du jeu c'est à dire le choix optimal des parents en termes de transfert. Vous noterez ce choix optimal par  $t^*$ .

**(2c)** Calculez l'équilibre de Nash S-parfait de ce jeu (subgame perfect Nash equilibrium). Donnez les valeurs d'équilibre de  $t$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $U_e(a, t, l)$ ,  $U_p(a, t)$ .