Université du Maine
Théorie des Jeux
(Yves Zenou)
Exercise sur les équilibres de Nash S-parfaits

Section 2

2a) La situation est modélisée par le jeu en forme extensive suivant :

Les joueurs : Les parents et l'enfant.
Les histoires terminales : L'ensemble des suites (a,t), où a est une action de l'enfant et t un transfert des parents vers l'enfant ; a et t sont des nombres.
La fonction des joueurs : $P(\varnothing)$ est l'enfant, $P(a)$ est le parent pour chaque valeur de a.
Les préférences : Les préférences de l'enfant sont représentées par :

$$U_e(a,t) = c(a) + t$$

alors que les préférences des parents sont représentées par

$$U_p(a,t) = \min\{p(a) - t, c(a) + t\}$$

2b) Trouvons le ou les équilibre(s) de Nash S-parfait de ce jeu. On résout comme d'habitude à rebours (backward induction) ce jeu. Donc, intéressons-nous d'abord à la décision des parents. L'enfant a choisi a et les parents doivent décider le montant de t.
On sait par hypothèse que : $c(a) < p(a)$. Donc si les parents ne font pas de transfert, i.e. t=0, alors leur utilité sera égale à :

$$U_p(a,0) = \min\{p(a), c(a)\} = c(a)$$

Si les parents transfèrent 1 Euro à l'enfant, alors leur paiement augmente de 1 Euro puisqu'il est égal à :

$$U_p(a,1) = \min\{p(a) - 1, c(a) + 1\} = c(a) + 1$$

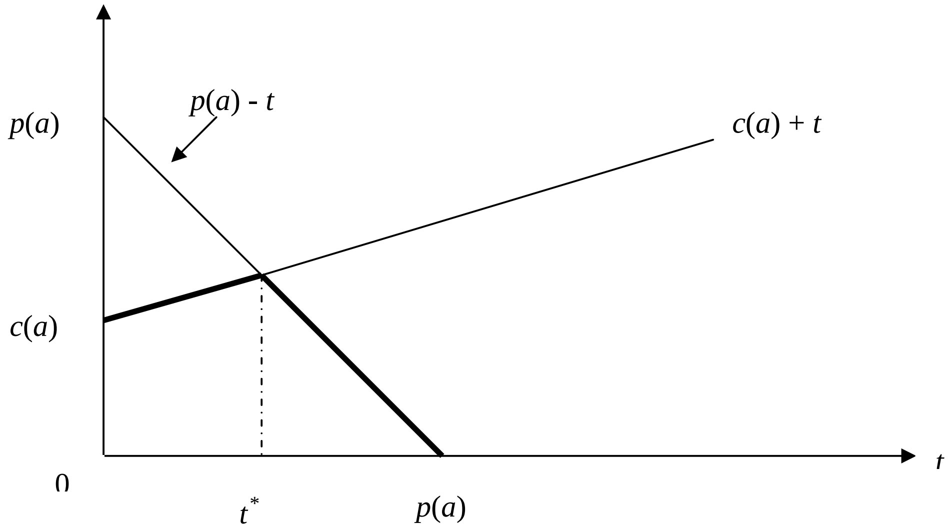
En fait, il est facile de voir qu'en augmentant t, l'utilité des parents augmentera jusqu'à ce que

$$p(a) - t^* = c(a) + t^* \qquad (1)$$

puisque si les parents proposent un $t > t^*$, alors leur utilité deviendra plus faible puisqu'ils auront moins d'argent que leur enfant, i.e.

$$U_p(a, t > t^*) = \min\{p(a) - t, c(a) + t\} = c(a) + t$$

En fait, pour voir cela d'une manière plus claire, on peut représenter sur une figure les fonctions p(a) - t et c(a) + t. L'utilité des parents correspond à la partie épaisse (en gras) des droites. On obtient :



En résolvant l'équation (1), on obtient :

$$t^* = \frac{p(a) - c(a)}{2}$$

2c) On a donc résolu la deuxième étape du jeu. Résolvons maintenant la première étape du jeu, c'est à dire le choix optimal a^* de l'enfant étant donné le choix t^* des parents. L'enfant résout le programme suivant :

$$\max_a U_e(a, t^*) = c(a) + t^* = \frac{c(a) + p(a)}{2}$$

On a supposé que *c*(*a*) = *a* et *p*(*a*) = 2*a* et $a \in [0,1]$. Ceci implique que :

$$t^* = \frac{p(a) - c(a)}{2} = \frac{a}{2}$$

et que l'enfant résout le programme suivant :

$$\max_a U_e(a, t^*) = c(a) + t^* = \frac{3a}{2}$$

La condition de premier ordre donne :

$$\frac{\partial U_e(a, t^*)}{\partial a} = \frac{3}{2} > 0$$

Donc, puisque l'utilité de l'enfant augmente toujours avec *a*, il va choisir la valeur maximale de *a* et donc on obtient :

$$a^* = 1$$

L’équilibre de Nash S-parfait de ce jeu est donc

$$a^* = 1, \quad t^* = \frac{1}{2}$$

et les utilités d’équilibre sont données par :

$$U_e(a^*, t^*) = c(a^*) + t^* = a^* + t^* = \frac{3}{2}$$

pour l’enfant, et

$$U_p(a^*, t^*) = p(a^*) - t^* = 2a^* - t^* = \frac{3}{2}$$

pour les parents.