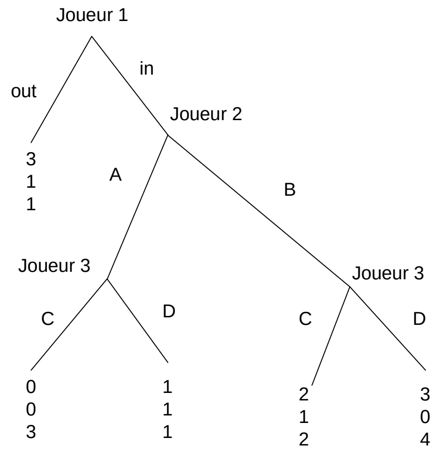
Université du Maine
Théorie des Jeux

Yves Zenou

Correction Contrôle Continu: 16 decembre 2008
(1 heure et demi)

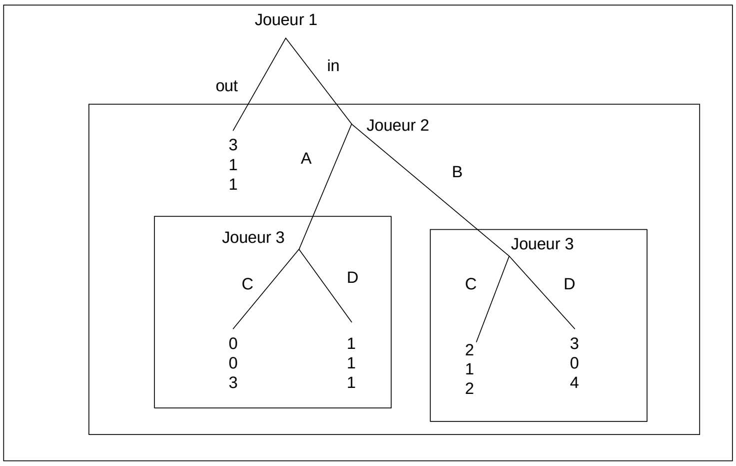
Exercise 1. Considérons la figure suivante:



Par convention, le paiement du joueur 1 est le premier paiement, le paiement du joueur 2 est le deuxième paiement, le paiement du joueur 3 est le troisième paiement.

(1a) Combien de sous-jeux pouvez-vous identifier? Faire une figure avec tous les sous-jeux.

Il y a quatre sous-jeux et la figure suivante représente ces sous-jeux.



(1b) Montrez qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash S-parfait de ce jeu en stratégies pures.

Résolvons le dernier sous-jeu. On a la matrice suivante:

$$
\begin{array}{lccc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Joueur 3}} \\
 & & C & D \\
\text{Joueur 2} & A & 0\ ,\ \underline{3} & \underline{1}\ ,\ 1 \\
 & B & \underline{1}\ ,\ 2 & 0\ ,\ \underline{4}
\end{array}
$$

On voit bien qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures de ce sous-jeu puisque les meilleures réponses des joueurs sont indiquées en soulignant les chiffres.

(1c) Calculez l'unique équilibre de Nash S-parfait de ce jeu en stratégies mixtes.

Supposons que le joueur 2 joue la stratégie A avec probabilité p et la stratégie B avec probabilité $1-p$. L'espérance d'utilité du joueur 2 est alors donnée par:

$$
\begin{aligned}
EU_2 &= p\left[q \times 0 + (1-q) \times 1\right] + (1-p)\left[q \times 1 + (1-q) \times 0\right] \\
&= p\,(1-q) + (1-p)\,q
\end{aligned}
$$

Le joueur 2 va choisir la probabilité p qui maximise son espérance d'utilité:

$$\max_p EU_2 = 1 - 2q$$

On a:

$$\frac{\partial EU_2}{\partial p} \gtreqqless 0 \Leftrightarrow q \lesseqqgtr \frac{1}{2}$$

et donc

$$\begin{cases} \text{si } q < \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p = 1 \\ \text{si } q > \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p = 0 \\ \text{si } q = \frac{1}{2} & \text{on a} \quad p \in [0,1] \end{cases}$$

Supposons maintenant que le joueur 3 joue la stratégie C avec probabilité q et la stratégie D avec probabilité $1-q$. L'espérance d'utilité du joueur 3 est alors donnée par:

$$\begin{aligned} EU_3 &= q\left[p \times 3 + (1-p) \times 2\right] + (1-q)\left[p \times 1 + (1-p) \times 4\right] \\ &= q\,(p+2) + (1-q)\,(4-3p) \end{aligned}$$

Le joueur 3 va choisir la probabilité q qui maximise son espérance d'utilité:

$$\max_q EU_3 = 4p - 2$$

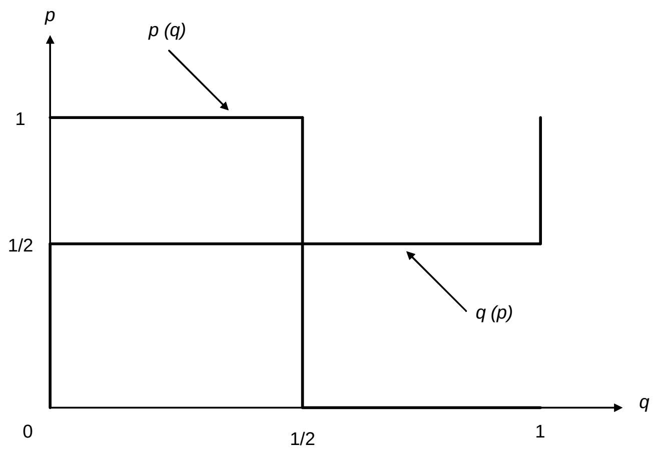
On a:

$$\frac{\partial EU_3}{\partial q} \gtreqqless 0 \Leftrightarrow p \gtreqqless \frac{1}{2}$$

et donc

$$\begin{cases} \text{si } p < \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q = 0 \\ \text{si } p > \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q = 1 \\ \text{si } p = \frac{1}{2} & \text{on a} \quad q \in [0,1] \end{cases}$$

La figure suivante représente les fonctions de meilleures et réponses



et on voit bien qu'il existe un unique équilibre de Nash en strategies mixtes qui est

$$(p^*, q^*) = (1/2, 1/2)$$

Le joueur 1 doit décider d'entrer ou de ne pas entrer. S'il n'entre pas (out) il obtient 3 alors que s'il rentre (in) il obtient

$$\begin{aligned} EU_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3\right] \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Puisque $3/2 < 3$, le joueur 1 n'entrera pas. Donc l'unique équilibre de Nash S-parfait en stratégies mixtes de ce jeu est (out,1/2,1/2).

Exercise 2. La décision d'une action $a \geq 0$ d'un enfant affecte à la fois son propre revenu et le revenu de ses parents. L'enfant est égoïste : il se préoccupe uniquement du montant d'argent qu'il a. Au contraire, ses parents se préoccupent à la fois de combien d'argent ils ont eux-mêmes et de combien d'argent leur enfant a.

Les parents décident de transférer de l'argent à l'enfant. Ce transfert est noté $t \geq 0$. Les préférences des parents sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U_p(a, t) = \log a + \log t + \frac{a}{t}$$

Ici, l'action a de l'enfant signifie le nombre d'heures qu'il passe à travailler ses devoirs. Comme tout le monde, il a 24 heures par jour et il dort 8 heures. Donc sa contrainte de temps s'écrit:

$$16 = a + l$$

où l signifie le nombre d'heures qu'il passe pour le loisir. La fonction d'utilité de l'enfant est donnée par:

$$U_e(a, t, l) = \log a + \log t + \log l$$

On rappelle que pour toute fonction $\log[f(x)]$, on a:

$$\frac{d \log[f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

où est $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$ par rapport à x. En particulier,

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Le timing du jeu est le suivant. Tout d'abord, l'enfant prend sa décision en déterminant de manière optimale le nombre d'heures a qu'il va consacrer à faire ses devoirs. Puis les parents décident le montant de t, c'est à dire combien d'argent ils vont transférer à l'enfant.

(2a) Modéliser cette situation comme un jeu en forme extensive.

La situation est modélisée par le jeu en forme extensive suivant :

Les joueurs: Les parents et l'enfant.

Les histoires terminales: L'ensemble des suites (a, t), où a est une action de l'enfant et t un transfert des parents vers l'enfant; a et t sont des nombres positifs réels.

La fonction des joueurs: $P(\varnothing)$ est l'enfant, $P(a)$ est le parent pour chaque valeur de a.

Les préférences: Les préférences de l'enfant sont représentées par:

$$U_e(a, t) = \log a + \log t + \log (16 - a)$$

alors que les préférences des parents sont représentées par:

$$U_p(a, t) = \log a + \log t + \frac{a}{t}$$

(2b) Résolvez la deuxième étape du jeu c'est à dire le choix optimal des parents en termes de transfert. Vous noterez ce choix optimal par t^*.

Les parents résolvent le programe suivant:

$$\max_t \left\{ U_p(a, t) = \log a + \log t + \frac{a}{t} \right\}$$

La condition de première ordre est:

$$\frac{1}{t} - \frac{a}{t^2} = 0$$

ce qui implique:

$$t^* = a \qquad (1)$$

(2c) Calculez l'équilibre de Nash S-parfait de ce jeu (subgame perfect Nash equilibrium). Donnez les valeurs d'équilibre de t, a, l, $U_e(a, t, l)$, $U_p(a, t)$.

En première étape de ce jeu, l'enfant maximise son utilité tout en anticipant le choix de ses parents. Il résoud le programe suivant:

$$\max_a \{\log a + \log t^* + \log (16 - a)\}$$

En utilisant la valeur de t^* de (1), on obtient:

$$\begin{aligned} & \max_a \{\log a + \log a + \log(16-a)\} \\ = & \max_a \{2\log a + \log(16-a)\} \end{aligned}$$

La condition de première ordre est:

$$\frac{2}{a} - \frac{1}{16-a} = 0$$

ce qui implique:

$$a^* = \frac{32}{3} = 16.66$$

En utilisant la contrainte de temps, on obtient:

$$l^* = 16 - a^*$$

ce qui donne

$$l^* = \frac{16}{3} = 5.33$$

En remplaçant ces valeurs dans les fonctions d'utilité, on obtient:

$$\begin{aligned} U_e(a,t) &= 2\log a^* + \log(16-a^*) \\ &= 6.408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_p(a,t) &= 2\log a^* + 1 \\ &= 5.734 \end{aligned}$$